문항 1

출제의도 및 평가기준

01. 출제의도

본 문제는 이산확률변수의 의미를 이해하고 이항정리를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

02. 평가기준

[논제] (90점)

확률변수 X는 두 번의 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 횟수의 합이므로 확률변수 X가 가지는 값은 0, 1, 2, ⋯, n이다. $0 \le k \le n$인 정수 k와 $0 \le i \le k$인 정수 i에 대하여 첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 i번, 두 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 $(n-i)$번 중 $(k-i)$번 나오면 X의 값은 k이고 그 확률은

$$\begin{aligned} & {}_{n}\mathrm{C}_{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i} \times {}_{n-i}\mathrm{C}_{k-i}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i} \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\left(\frac{3}{2}\right)^{i} = {}_{n}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \times {}_{k}\mathrm{C}_{i}\left(\frac{3}{2}\right)^{i} \end{aligned}$$

이다.

30점

따라서 $\mathrm{P}(X=k)$는

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=k) &= \sum_{i=0}^{k} {}_{n}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \times {}_{k}\mathrm{C}_{i}\left(\frac{3}{2}\right)^{i} \\ &= {}_{n}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \sum_{i=0}^{k} {}_{k}\mathrm{C}_{i}\left(\frac{3}{2}\right)^{i} \\ &= {}_{n}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(1+\frac{3}{2}\right)^{k} \\ &= {}_{n}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{5}{4}\right)^{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{n} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{aligned}$$

이다.

30점

그러므로 $\sum_{k=0}^{n} a_k$는

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} 2^k\, {}_{n}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{5}{4}\right)^{k}\left(\frac{4}{9}\right)^{n} \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k}\left(\frac{5}{2}\right)^{k} = \left(\frac{4}{9}\right)^{n}\left(1+\frac{5}{2}\right)^{n} = \left(\frac{14}{9}\right)^{n} \end{aligned}$$

이다.

30점