문항 2

출제의도 및 평가기준

01. 출제의도

본 문제는 공간벡터와 공간벡터의 내적을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 또한, “모든” “어떤”이 있는 명제를 해석할 수 있는지도 평가하고자 하였다.

02. 평가기준

[논제] (90점)

정사각형의 대각선의 교점을 O, 선분 AB의 중점을 E, 선분 BC의 중점을 F라고 하자. 이등변삼각형에서 내접원의 반지름을 r, 이 삼각형의 넓이를 S, 이 삼각형의 둘레의 길이를 L 이라고 하면, $S=r\frac{L}{2}$를 만족하므로, 삼각형 HAB 내접원의 반지름은 $\frac{\sqrt{15}}{5}$이다. 점 P는 선분 HE 위에 있고, 선분 HP의 길이는 $4\frac{\sqrt{15}}{5}$이 되어, $\left\lvert\frac{\overrightarrow{\mathrm{HP}}}{2}\right\rvert^2=\frac{12}{5}$이다. $\vec{x}=\overrightarrow{\mathrm{OE}},\ \vec{y}=\overrightarrow{\mathrm{OF}},\ \vec{z}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ 라고 하자($\lvert\vec{x}\rvert=\lvert\vec{y}\rvert=1,\ \lvert\vec{z}\rvert=\sqrt{14}$). 점 P는 선분 HE를 4:1로 내분하므로, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{5}\vec{x}+\frac{1}{5}\vec{z}$이고, 마찬가지로 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{4}{5}\vec{y}+\frac{1}{5}\vec{z}$임을 알 수 있다. 선분 DB 위의 임의의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t(\vec{x}+\vec{y})$라고 하면($-1\le t\le 1$), $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(t-\frac{4}{5}\right)\vec{x}+t\vec{y}-\frac{1}{5}\vec{z}$, $\overrightarrow{\mathrm{QR}}=t\vec{x}+\left(t-\frac{4}{5}\right)\vec{y}-\frac{1}{5}\vec{z}$ 이므로, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=2t\left(t-\frac{4}{5}\right)+\frac{14}{25}=2\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{6}{25}$이다. $\lvert t\rvert\le 1$이므로 $\frac{6}{25}\le\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}\le\frac{104}{25}$ 이다.	50점
$\overrightarrow{\mathrm{PX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HX}}=\overrightarrow{\mathrm{PX}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{HP}}+\overrightarrow{\mathrm{PX}})$ $=\lvert\overrightarrow{\mathrm{PX}}\rvert^2+\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\left\lvert\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{HP}}}{2}\right\rvert^2-\left\lvert\frac{\overrightarrow{\mathrm{HP}}}{2}\right\rvert^2$ 이므로 집합 S가 공집합이 되기 위해서는 선분 DB 위의 임의의 점 R에 대하여 $\left\lvert\frac{\overrightarrow{\mathrm{HP}}}{2}\right\rvert^2+k\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}<0$이 되어야 한다. $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$는 양수이므로 k는 음수가 되어야 한다. 따라서, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$의 최솟값에서도 음수가 되어야 하므로, 구하는 범위는 $\frac{12}{5}+k\frac{6}{25}<0$, 즉, $k<-10$이다.	40점