한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 1-1]

$$f'(x) = \frac{2x(x+\sqrt{a^2-x^2}) - x^2\left(1+\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right)}{(x+\sqrt{a^2-x^2})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a^2-x^2}\,x^2+4(a^2-x^2)x+2x}{2\sqrt{a^2-x^2}\,(x+\sqrt{a^2-x^2})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a^2-x^2}\,x^2+4(a^2-x^2+\frac{1}{2})x}{2\sqrt{a^2-x^2}\,(x+\sqrt{a^2-x^2})^2}$$ 이다.

$f(0)=0$, $f(a)=a$ 이고 $0 \le x < a$ 에서 $f'(x) \ge 0$ 이므로

함수 $f(x)$는 구간 $[0, a)$에서 증가하는 함수이다.

$\therefore$ 함수 $f(x)$는 구간 $[0, a)$에서 일대일 함수

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 1-2]

정적분의 정의에 의해서

$$\int_0^{\pi} x f(a\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)dx$$ 이다.

이때, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)dx$ 에서 $x=\pi-t$로 치환하면

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f(a\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)f(a\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t f(a\sin t)dt$$ 이다.

그러므로 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)dx$$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 1-3]

2의 결과에 의해

$$\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx$$

$$= \pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= \frac{\pi a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,dx$$

$x+\frac{\pi}{4}=t$

$$= \frac{\pi a}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin^2(t-\frac{\pi}{4})}{\sin t}\,dt$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left\{ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sin t}\,dt - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos t\,dt \right\}$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left\{ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt - 2\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \right\}$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left\{ \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{p^2-1}\,dp \right\}$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(\left[\ln|P+1| - \ln|P-1|\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \left(\ln(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) - \ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \right)$$

$$= \frac{\pi a}{2\sqrt{2}} \ln(3+2\sqrt{2})$$