한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시

| 자 연 계 | 모 의 논 술 예 시 답 안 | 1 번 |
|---|---|---|

1. $f'(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{a^2-x^2})-x^2(1-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}})}{(x+\sqrt{a^2-x^2})^2}=\dfrac{x(x\sqrt{a^2-x^2}+2a^2-x^2)}{(x+\sqrt{a^2-x^2})^2\sqrt{a^2-x^2}}$

이고, 모든 $0 \le x \le a$에 대하여 $x\sqrt{a^2-x^2}+2a^2-x^2>0$이므로 $f'(0)=0$이다.
따라서 임의의 $0<x<a$에 대하여 $f'(x)>0$이고 $f(x)$는 $[0,a]$에서 연속이므로, 함수 $f(x)$는 단조증가함수이고 일대일 함수이다.

2. $I=\int_0^{\pi} xf(a\sin x)dx$라 하면 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(a\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(a\sin x)dx$이고

$t=\pi-x$로 치환하여 적분하면

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(a\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)f(a\sin(\pi-t))(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)f(a\sin t)dt$$

이므로 $I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)dx$ 이다.

3. 2번의 결과로부터

$$I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin^2 t}{a\sin t+a\cos t}dt=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sin t+\cos t}dt$$

이고, 다시 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-t$로 치환하여 적분하면

$$I=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sin t+\cos t}dt=a\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)+\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}(-d\theta)=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$

따라서 $2I=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=a\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$ 이고,

$$I=\frac{a\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}d\theta=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta$$

이다. 다시 $\cos\theta=x$로 치환하여 적분하면,

$I=\dfrac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta=\dfrac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{(-dx)}{1-x^2}=\dfrac{a\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{dx}{1-x^2}$ 이다.

한편 $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1})$이므로,

$I=\dfrac{a\pi}{4\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\,dx=\left[\dfrac{a\pi}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{a\pi}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$ 이다.

| | | |
|---|---|---|
| | **한양대학교 2019학년도 신입학전형 수시** | |
| 자 연 계 | **모 의 논 술 예 시 답 안** | 2 번 |

1\. $m=20,\ n=15$ 일 때, $p(x)=(1-x)^{20}(1+x)^{15}=(1-x^2)^{15}(1-x)^5=p_1(x)p_2(x)$ 이다.

여기서 $p_1(x)=(1-x^2)^{15}$, $p_2(x)=(1-x)^5$ 이다.

다항식 $p(x)$ 에서 $x^7$ 의 계수 $a_7$ 는

$$a_7={}_{15}C_1\cdot{}_5C_5\cdot(-1)^1(-1)^5+{}_{15}C_2\cdot{}_5C_3\cdot(-1)^2(-1)^3+{}_{15}C_3\cdot{}_5C_1\cdot(-1)^3(-1)^1$$

$$=15\cdot1+\frac{15\times14}{2}\cdot\frac{5\times4\times3}{3\times2}\cdot(-1)+\frac{15\times14\times13}{3\times2}\cdot5$$

$$=1240$$

2\. $p(x)=(1-x)^m(1+x)^n=(1-x)\left[(1-x)^{m-1}(1+x)^n\right]=q(x)-xq(x)$ 에서

양변의 $x^k$ 의 계수를 비교하면, $a_k=b_k-b_{k-1}$ …… ①

$p(x)=\sum_{k=0}^{m+n}a_kx^k=(1-x)^m(1+x)^n$ 의 양변을 미분하면,

$$p'(x)=\sum_{k=1}^{m+n}ka_kx^{k-1}=-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n+n(1-x)^m(1+x)^{n-1}=-mq(x)+nr(x)$$ 이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{m+n}ka_kx^{k-1}=-m\sum_{k=0}^{m+n-1}b_kx^k+n\sum_{k=0}^{m+n-1}c_kx^k$ 이다.

위 등식에서 $x^{k-1}$ 의 계수를 비교하면, $ka_k=-mb_{k-1}+nc_{k-1}$ …… ②

식 ②의 $a_k$ 대신에 식 ①을 대입하면,

$$k(b_k-b_{k-1})=-mb_{k-1}+nc_{k-1}\Rightarrow(m-k)b_{k-1}+kb_k-nc_{k-1}=0$$

3\. $p(x)=(1-x)^m(1+x)^n=\left[(1-x)^m(1+x)^{n-1}\right](1+x)=r(x)+xr(x)$ 에서

양변의 $x^k$ 의 계수를 비교하면, $a_k=c_k+c_{k-1}$ …… ③

식 ②의 $a_k$ 대신에 식 ③을 대입하면,

$$k(c_k+c_{k-1})=-mb_{k-1}+nc_{k-1}\Rightarrow mb_{k-1}+kc_k-(n-k)c_{k-1}=0$$