한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 1-1]

귀류법을 이용하자.

$x_1 \neq x_2$ 일때 $f(x_1) = f(x_2)$ 를 만족하는 x_1 과 x_2 가 있다고 가정.

$x_1 = a\sin\alpha$ $\left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right)$, $x_2 = a\sin\beta$ $\left(0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\right)$ 이면 $g(\theta) = a\sin\theta$ 일때 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 에서

$g(\theta)$ 는 일대일 함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 에서 $\alpha \neq \beta$ 이다.

$$f(x_1) = \frac{a^2\sin^2\alpha}{a\sin\alpha + a\cos\beta}, \quad f(x_2) = \frac{a^2\sin^2\beta}{a\sin\beta + a\cos\beta}$$ 이고, $a > 0$ 이므로

$h(\theta) = \dfrac{a\sin^2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ 일때 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 에서 $h(\alpha) = h(\beta)$ 이므로

평균값 정리에 의해 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $h'(\theta) = 0$ 인 θ 가 존재.

$$h'(\theta) = \frac{2a\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) - a\sin^2\theta(\cos\theta - \sin\theta)}{(\sin\theta + \cos\theta)^2}$$

제시문 (가)의 예를 이용하면

$$h'(\theta) = \frac{a\sin\theta\left(\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}{2\sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

인데 $a > 0$ 이고 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서

$\sin\theta > 0$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta > 0$,

$2\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 + \cos^2\theta > 0$ 이므로

$h'(\theta) = 0$ 인 θ 가 존재하지 않는다

따라서 모순이 생기므로 $f(x)$ 는 일대일 함수

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 1-2]

미적분학의 기본정리에 의해 $\int x f(a\sin x)\,dx = F(x) + C$ 일 때

$\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx = F(\pi) - F(0)$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)\,dx = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) + F(\pi) - F(\frac{\pi}{2}) = F(\pi) - F(0)$

이므로 $\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)\,dx$ 성립

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)\,dx$ 에서 $x = \pi - t$ 로 치환

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi - t) f(a\sin(\pi - t))\,(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(a\sin t)\,dt$$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(a\sin x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(a\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - x) f(a\sin x)\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx$$ 성립

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 1-3]

문제 1-3에 의해 $\int_0^{\pi} x f(a\sin x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)dx$ 가 성립한다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)dx$ 에서 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 로 치환하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\cos t)dt \text{ 이다}$$

즉 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx = \frac{1}{2} \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x) + f(a\cos x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\sin^2 x}{a\sin x + \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 x}} + \frac{a^2\cos^2 x}{a\cos x + \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 x}}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{a\sin x + a\cos x}\,dx\right) \text{ 이다.}$$

$a>0$이고 위 식을 (가)에서 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 가 성립하므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\sin x)\,dx = \frac{a}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx \text{ 인데}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\,dx$$ 이고 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = t$로 치환하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\ln(1-t) + \ln(1+t)\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right) \text{ 이다.}$$

따라서 $$\int_0^{\pi} x f(a\sin x)\,dx = \pi \times \frac{a}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{a\pi}{4\sqrt{2}} \times \ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right) \text{ 이다.}$$