한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 2-1]

$m=20, n=15$일 때, $p(x)=(1-x)^{20}(1+x)^{15}=(1-x)^{5}\cdot(1-x^{2})^{15}$ 이다.

<다>제시문에 의해 $p(x)=\left(\sum_{i=0}^{5}(-x)^{i}\cdot{}_{5}C_{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{15}(-x^{2})^{j}\cdot{}_{15}C_{j}\right)$ 이다.

$p(x)$에서 x^{7}는 $(1-x)^{5}$에서 x^{i}항과 $(1-x^{2})^{15}$에서 x^{2j}항이 곱해져서 만들어진다고 하면, $7=i+2j$ 여야 하는데, $0\le i\le 5$, $0\le j\le 15$인 정수 i, j는 만족하는 순서쌍 (i, j)가 $(1,3), (3,2), (5,1)$ 뿐이다.

$(1-x)^{5}$에서 x^{1}, x^{3}, x^{5}의 계수는 각각 $-5, -10, -1$ 이고,
$(1-x^{2})^{15}$에서 x^{3}, x^{2}, x^{1}의 계수는 각각 $-455, 105, -15$ 이므로,
$p(x)$에서 x^{7}의 계수는 $(-5)\times(-455)+(-10)\times(105)+(-1)\times(-15)$ 인 1240 이다.

따라서 $a_{7}=1240$ 이다.

$\boxed{\text{답}: 1240}$

4

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 2-2]

$p(x) = (1-x)^m(1+x)^n = (1-x) \times (1-x)^{m-1}(1+x)^n = (1-x)g(x) = g(x) - xg(x)$ 이다. (㉠)

$p(x)$의 x^k의 계수는 a_k, $g(x)$의 x^k의 계수는 b_k이고,

$xg(x)$의 x^k의 계수는 $g(x)$의 x^{k-1}의 계수와 같고 이는 b_{k-1} 이다.

㉠에 의해 $p(x)$의 x^k의 계수와 $(g(x)-xg(x))$의 x^k의 계수는 같다.

따라서, $a_k = b_k - b_{k-1}$ 이고, $-b_{k-1}+b_k-a_k=0$ 이다. (㉡)

$p'(x)$의 x^{k-1}의 계수를 A_{k-1} 이라 하자.

$a_k x^k$를 x에 대해 미분하면 $ka_k x^{k-1}$ 이므로, $A_{k-1}=ka_k$ 이다. (㉢)

<나>제시문에 의해 $p'(x) = m(1-x)^{m-1}\cdot(-1)\cdot(1+x)^n + (1-x)^m \cdot n(1+x)^{n-1}$

$= -m\,g(x) + n\,r(x)$ 이므로,

$A_{k-1} = -mb_{k-1} + nc_{k-1}$ 이다. (㉣)

㉢,㉣에 의해 $ka_k = A_{k-1} = -mb_{k-1}+nc_{k-1}$, 즉 $-ka_k = mb_{k-1} - nc_{k-1}$ 이다. (㉤)

㉡,㉤에 의해 $(m-k)b_{k-1}+kb_k-nc_{k-1} = -kb_{k-1}+kb_k+(mb_{k-1}-nc_{k-1})$

$= k(-b_{k-1}+b_k-a_k) = 0$ 이다

따라서, $(m-k)b_{k-1}+kb_k-nc_{k-1}=0$ 이다.

$\boxed{\text{답} : 0}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지

[문제 2-3]

$p(x)=(1-x)^m(1+x)^n=(1+x)\cdot(1-x)^m(1+x)^{n-1}=(1+x)r(x)=r(x)+xr(x)$ 이므로,

$p(x)$의 x^k 계수 a_k 와 $(r(x)+xr(x))$의 x^k계수 (c_k+c_{k-1}) 이 같다.

따라서, $a_k=c_k+c_{k-1}$ 이다. (㉠)

$p'(x)$의 x^{k-1} 계수 A_{k-1}은 문제 2-2 에서 보인 바와 같이

$A_{k-1}=ka_k$ 이 성립한다. (㉡)

<나> 제시문에 의해 $p'(x)=m(1-x)^{m-1}(-1)(1+x)^n+(1-x)^m n(1+x)^{n-1}$

$=-mq(x)+nr(x)$ 이므로,

$A_{k-1}=-mb_{k-1}+nc_{k-1}$ 이다. (㉢)

㉡,㉢에 의해 $ka_k=A_{k-1}=-mb_{k-1}+nc_{k-1}$, 즉 $-ka_k=mb_{k-1}-nc_{k-1}$ 이다. (㉣)

㉠,㉣에 의해 $mb_{k-1}+kc_k-(n-k)c_{k-1}$

$=(mb_{k-1}-nc_{k-1})+k(c_k+c_{k-1})$

$=(-ka_k)+ka_k=0$ 이다.

따라서, $mb_{k-1}+kc_k-(n-k)c_{k-1}=0$ 이다.

$\boxed{\text{답}:0}$