

2018학년도 논술전형 자연계열Ⅱ(오후) 문제

수학

[문제 1] 우리나라 학생의 장래 희망직업에 대하여 다음의 상황들을 고려하자.

가

우리나라 학생의 희망직업 선호도에 대하여 다음과 같은 사실이 알려져 있다고 하자.

- 학생의 희망직업 1위와 보호자가 희망하는 학생의 직업 1위는 모두 교사이다.
- 학생의 희망직업이 교사일 확률은 $\frac{1}{5}$ 이며, 보호자가 희망하는 학생의 직업이 교사일 확률은 $\frac{3}{8}$ 이다.
- 학생의 희망직업은 그 보호자가 희망하는 학생의 직업에 영향을 받는다.
- 보호자가 희망하는 학생의 직업이 교사일 때, 그 학생의 희망직업이 교사일 확률은 $\frac{2}{5}$ 이다.

나

한 연구기관에서는 학생과 보호자의 희망직업 일치도에 대한 인식조사 연구를 수행하고자 한다. 이 연구에서는 임의로 학생과 그 보호자 20쌍을 선택하여 그룹 1과 그룹 2로 10쌍씩 임의로 나누고, 그룹 1에서는 학생에게만 희망직업을 조사하고 그룹 2에서는 보호자에게만 학생의 희망직업을 조사하였다. 그 결과 희망직업이 교사인 경우가 각 그룹에서 2쌍씩 관측되었다.

제시문 (가)로부터 학생의 희망직업이 교사일 때 그 보호자가 희망하는 학생의 직업이 교사일 확률을 구하고, 제시문 (나)에서 관측된 4쌍 중에서 학생과 보호자의 희망직업이 일치하는 경우가 적어도 2쌍 이상 있을 확률을 구하시오. [20점]

[문제 2] 다음 제시문 (가)와 (나)를 읽고 문제에 답하시오.

가

미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $x = g(t)$ 로 놓으면 다음이 성립한다.

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

나

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가지고 a 를 포함하는 어떤 열린 구간에서 미분가능하면 $f'(a) = 0$ 이 성립한다.

[문제 2-1] 다음 극한을 구하시오. [10점]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4 \cos^2 \left(\frac{\pi k^2}{4n^2} \right)}$$

[문제 2-2] 두 실수 x, y 가 $x + y = 8, -84 \leq xy \leq -65$ 를 만족한다. 다음 식의 최댓값 M 과 최솟값 m 을 구하시오. [15점]

$$(x^2 + y^2 + 3xy)e^y$$

[문제 3] 다음 제시문 (가) - (라)를 읽고 문제에 답하시오.

가

평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발 P'을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

나

두 공간벡터 \vec{a}, \vec{b} 가 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)일 때 다음이 성립한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

다

두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 가 각각 u , x 에 대하여 미분가능하면 합성함수 $y = f(g(x))$ 도 x 에 대하여

미분가능하고, 그 도함수는 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 이다.

라

x 의 함수 y 가 음함수 $f(x, y) = 0$ 의 꼴로 주어졌을 때, y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분한 후 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

[문제 3-1]

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구를 평면 $x + y + z = 1$ 로 자를 때 생기는 단면을 F 라 하자. 도형 F 의 평면 $(t-1)x + ty + (t+1)z = 1$ 위로의 정사영을 F' 이라 하고, F' 의 넓이를 $S(t)$ 라고 할 때, $\int_{-1}^2 S(t)dt$ 의 값을 구하시오. (단, t 는 실수이다.) [10점]

[문제 3-2]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 좌표는 $(t, -3)$ 이다. 곡선 $y = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ 위의 점 Q(x, y)는 점 P와 거리를 5로 유지하며 연속적으로 움직인다. $t = 4$ 일 때 Q의 좌표가 $(0, 0)$ 이다. $t = \pi + 4$ 일 때, 점 Q의 속도

$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ 를 구하시오. [15점]

[문제 4] 다음 제시문 (가) - (마)를 읽고 문제에 답하시오.

가

우리가 섭취한 음식물을 분해하여 생활에 필요한 에너지를 얻거나, 몸에 필요한 물질을 합성하는 과정은 모두 화학 반응 때문에 이루어지고, 이를 통틀어 물질대사라고 한다. 이러한 화학 반응에서 활성화 에너지를 낮추어 주는 역할을 하는 것을 효소라고 한다. 생물체 내에서 효소는 물질을 분해하거나 합성하는 작용을 하고, 분자의 구조를 바꿔 성질이 다른 물질로 변화시키는 등의 다양한 기능을 한다.

나

효소는 기질과 결합하여 효소-기질 복합체를 만들어 활성화 에너지를 낮춤으로써 반응을 촉매한다. 이때 효소와 결합하는 특정 반응 물질을 기질이라 하고, 기질이 효소에 결합하는 부분을 활성 부위라고 한다. 효소와 기질이 결합하고 있는 동안 기질은 생성물로 변하게 된다. 생성물이 만들어지면 효소는 효소-기질 복합체로부터 분리되어 또 다른 반응에 참여하게 된다. 이처럼 효소는 촉매 작용을 한 후 반복 재사용되므로, 효소 1개가 수천 수백만 개의 기질에 작용할 수 있다.

다

효소의 반응 속도에 영향을 주는 요인으로는 온도, pH, 기질의 농도, 저해제 등이 있다. 효소-기질 복합체가 많이 만들어질수록 반응속도가 빨라지므로 기질의 농도가 증가하면 효소의 반응 속도도 증가한다. 그러나 효소가 기질에 의해 포화되면 더 이상 반응 속도는 증가하지 않고 일정해진다. 저해제는 효소와 기질을 결합하지 못하게 하여 효소의 촉매 작용을 방해한다. 경쟁적 저해제는 기질과 입체 구조가 비슷하기 때문에 효소의 활성 부위에 기질과 경쟁적으로 결합하여 효소의 활성을 저해한다. 비경쟁적 저해제는 기질과 입체 구조는 다르지만, 효소의 활성 부위가 아닌 다른 부위에 결합하여 효소의 활성을 저해한다.

라

특정한 생물에서 유용한 기능을 가지고 있는 유전자를 잘라내어 플라스미드나 바이러스 DNA 등의 운반체 DNA에 결합시킨 후 그것을 숙주 세포에 옮겨 넣어 유용한 기능을 가지고 있는 유전자를 다량으로 증식시키거나 그 기능을 발휘할 수 있게 하는 방법을 유전자 재조합 기술이라 한다. 이러한 기술을 이용하여 다른 생물에게 유용한 유전자를 도입하는 연구를 할 수 있다. 형질 발현의 첫 단계는 핵 안에서 DNA에 저장되어 있던 유전 정보가 mRNA로 옮겨지는 전사 과정이다. 전사 과정은 프로모터라고 하는 DNA의 특정 염기서열에 RNA 중합 효소가 결합하면서 시작된다. 전사 과정을 통해 DNA의 유전 정보를 전달받은 mRNA가 세포질로 이동하면 mRNA의 유전 정보에 따라 단백질이 합성된다.

마

원핵 세포에서 젓당 분해 효소의 생산에 관여하는 오페론을 젓당 오페론이라고 한다. 오페론의 앞부분에는 억제 단백질을 만들어 내는 조절 유전자가 존재한다. 대장균을 젓당이 없는 배지에서 배양하면, 조절 유전자에 의해 만들어진 억제 단백질이 프로모터에 인접해 있는 작동 유전자와 결합하여 프로모터에 부착한 RNA 중합 효소가 더 이상 이동하지 못하도록 하므로 구조 유전자의 전사가 일어나지 않는다. 반면, 대장균을 젓당이 있는 배지에서 배양할 경우 억제 단백질이 세포 안으로 들어온 젓당과 결합한 후 구조 변화를 일으켜 작동 유전자에 결합할 수 없게 된다. 따라서 RNA 중합 효소가 프로모터에 결합할 수 있게 되어 젓당을 분해하는 데 필요한 효소를 생산한다.

[문제 4-1] 대사질환 M은 효소 E의 반응 생성물이 체내에 축적되어 발생하는 질병이다. 효소 E의 활성 저해제인 A, B의 효능을 검증하기 위하여 다음과 같은 실험을 진행하였다.

[실험]

- I. 효소 E에 기질의 농도를 증가시키면서 초기 반응 속도를 측정하였다.
- II. 효소 E에 저해제 A, B를 첨가하고, 기질의 농도를 증가시키며 초기 반응 속도를 측정하였다.
- III. 체내 잔류 저해제의 기능을 분석하기 위해, 기질 농도 20 이상에서 반응에 참여하지 않고 수용액상에 남아 있는 저해제를 완전히 제거한 후, 기질의 농도를 다시 높여가면서 효소 E의 초기 반응 속도를 측정하였다.

[실험 결과]

<표> 기질농도에 따른 효소 E의 초기 반응 속도

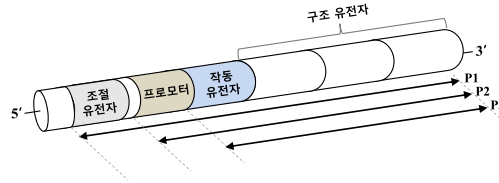
초기 반응속도(상댓값)

기질 농도(상댓값)		0	10	20	30	40	50	60
저해제 없음		0	45	73	88	96	100	100
저해제 A	첨가	0	24	45	68	86	100	100
	제거	0	24	58	80	92	100	100
저해제 B	첨가	0	12	26	36	44	44	44
	제거	0	12	26	36	44	44	44

실험 결과를 해석하여 저해제 A, B 중 어떤 것이 대사질환 M의 치료에 더 효과적인지 제시하고, 그 이유를 실험 결과와 제시문 (가), (나), (다)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. [10점]

[문제 4-2]

다음 그림은 젓당 오페론의 유전자 구조와 각 부위를 이용하여 제작한 재조합 DNA 플라스미드 (P1, P2, P3)의 모식도이다.



돌연변이 대장균인 mt1, mt2, mt3은 구조 유전자를 제외한 오페론의 각 부위에서 돌연변이가 일어나 정상 대장균과는 다른 생장을 한다. 젓당 오페론에서 자주 나타나는 각 부위별 돌연변이의 특성은 다음과 같다.

- (1) 조절 유전자 부위 돌연변이 : 억제 단백질이 발현되지 않는다.
- (2) 프로모터 부위 돌연변이 : RNA 중합 효소의 결합이 일어나지 않는다.
- (3) 작동 유전자 부위 돌연변이 : 억제 단백질의 결합력이 증가되어 있다.

대장균 mt1과 mt2에서 돌연변이가 일어난 부위를 알아보기 위해 아래와 같은 실험 I, II를 하였다.

[실험]

- I. 젓당 배지에서 정상 대장균 및 돌연변이 대장균 mt1, mt2를 배양한 후 각 대장균의 생장 여부와 오페론 구조 유전자의 mRNA 발현 양을 조사하였다.
- II. 정상 대장균 및 각 돌연변이 대장균에 존재하는 젓당 오페론의 특정 부위에 대한 재조합 DNA 플라스미드 (P1, P2, P3)를 만든 후, 단백질 합성이 가능한 조건의 시험관 내에서 포도당과 젓당을 각각 첨가하고 재조합 플라스미드로부터 만들어지는 구조 단백질(젓당 이용에 필요한 단백질)의 합성 여부를 조사하였다.

[실험 결과]

<표1> 젓당 배지

대장균 종류	대장균 생장 여부	구조 유전자 mRNA(상댓값)
정상 대장균	○	10
mt1 대장균	○	10
mt2 대장균	X	○

<표1> 재조합 플라스미드에서 구조 단백질 발현

대장균 종류	대장균 생장 여부	단백질 발현 여부	
		포도당 첨가	젓당 첨가
정상 대장균	P1	X	○
	P2	○	○
	P3	X	X
mt1 대장균	P1	○	○
	P2	○	○
	P3	X	X
mt2 대장균	P1	X	X
	P2	X	X
	P3	X	X

위 실험 결과와 제시문 (라), (마)에 근거하여 mt1 대장균과 mt2 대장균에 있는 젓당 오페론의 어느 부위에 돌연변이가 일어나 있는지를 밝히고, 그 이유를 설명하시오. 또한, 이 결과를 바탕으로 mt3 대장균을 이용하여 [실험] II를 다시 진행하였을 때, 예상되는 결과를 논리적으로 설명하시오. [20점]

- 끝 -

[문제 4] 다음 제시문 (가) - (라)를 읽고 문제에 답하시오.

가

용수철에 추를 연결하여 마찰이 없는 바닥에서 추를 x 만큼 당기거나 압축시켰다 놓으면 용수철은 주기적인 왕복 운동을 한다. 이러한 진자를 용수철 진자라고 한다. 용수철 진자의 용수철 길이가 x 만큼 늘어나면 탄성력 F 가 작용하며, 이는 탄성 한계 내에서 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$F = -kx$$

이를 훅의 법칙이라고 하고, 이 식에서 k 는 비례 상수로 용수철 상수 또는 탄성 계수라고 한다.

나

한 물체에 같은 크기의 두 힘이 반대 방향으로 작용하면 물체가 움직이지 않는다. 그 이유는 한 물체에 작용한 두 힘의 합이 0이 되기 때문이다. 이와 같이 한 물체에 둘 이상의 힘이 동시에 작용할 때, 같은 효과를 나타내는 하나의 힘을 알짜힘이라고 한다. 서로 같은 방향으로 두 힘이 작용할 때 두 힘의 합이 알짜힘이 되며, 알짜힘의 방향은 두 힘의 방향과 같다. 반면에 반대 방향으로 두 힘이 작용할 때 두 힘의 차가 알짜힘이 되며, 알짜힘의 방향은 더 큰 힘의 방향과 같다. 정지해 있는 물체에 작용하는 알짜힘은 항상 0이다.

다

물체에 알짜힘이 작용하면 물체는 가속도 운동을 하며, 이때 가속도의 크기는 알짜힘의 크기에 비례하고 질량에 반비례한다. 또한, 물체의 가속도 방향은 물체에 작용하는 알짜힘의 방향과 같다. 이를 뉴턴의 운동 제2 법칙이라고 한다.

라

변위의 크기에 비례하고 변위의 방향과 반대 방향으로 복원력이 작용하여 주기적으로 왕복하는 운동을 단진동이라고 한다. 단진동하는 물체의 변위 x 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = C \sin \omega t$$

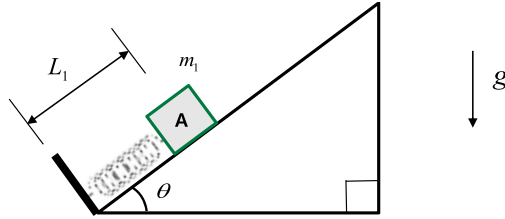
여기서 C 는 단진동의 최대 변위로 진폭이라고 하고 t 는 시간이며, ω 는 단진동의 각속도이고 단진동의 주기 P 와 다음과 같은 관계가 있다.

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

단진동하는 물체에 작용하는 힘은 변위의 방향과 반대이며, 변위의 크기에 비례하는 복원력으로 작용한다.

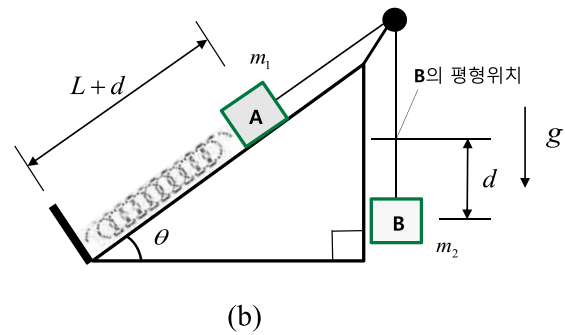
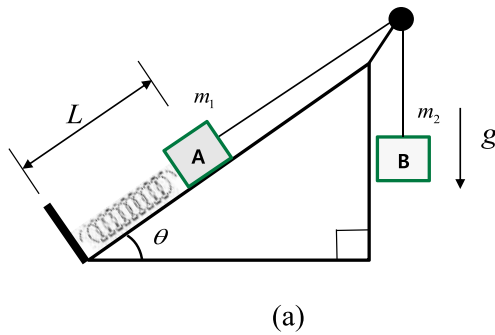
[문제 4-1]

다음 그림과 같이, 용수철의 한 끝은 비탈면 왼쪽 끝에 고정되어 있고 다른 한 끝은 비탈면 위에 놓여 있는 질량 m_1 인 물체 A에 연결되어 있다. 용수철 상수는 k 이고 용수철의 원래 길이는 L_0 이며, 비탈면이 지면과 이루는 각도는 θ 이다. 물체 A가 평형 상태에 있는 경우의 용수철의 길이 L_1 과, 단진동하는 경우의 주기를 구하는 과정을 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하시오. (단, 지구의 중력가속도는 g 로 일정하고, 물체 A의 크기, 공기 저항, 마찰은 무시한다.) [10점]



[문제 4-2]

다음 그림 (a)와 같이, [문제 4-1]과 같은 물체 A에 질량이 m_2 인 물체 B를 늘어나지 않는 실로 연결하였을 때 평형 상태에서 용수철의 길이 L 를 구하는 과정을 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 논리적으로 설명하시오. 또한, 그림 (b)와 같이, 평형 상태에 있었던 물체 B를 연직방향으로 d 만큼 잡아당겼다가 정지 상태에서 가만히 놓았더니 물체 A와 B가 함께 운동하기 시작하였다. 이때 물체 B가 단진동하기 위한 d 의 조건을 구하는 과정을 제시문에 근거하여 논리적으로 설명하시오. (단, $L > d$ 이고, 지구의 중력가속도는 g 로 일정하며, 물체 A와 B의 크기, 실의 질량, 공기 저항, 마찰은 무시한다.) [20점]



- 끝 -

[문제 4] 다음 제시문 (가) - (라)를 읽고 문제에 답하시오.

가

1885년 발머는 수소 방전관에서 다음과 같이 빛의 파장이 410nm, 434nm, 486nm, 656nm인 가시광선 영역대의 선 스펙트럼을 관찰하였으나, 왜 이런 현상이 일어나는지에 대해서는 설명하지 못하였다.



1913년 보어는 수소 원자의 선 스펙트럼을 설명하기 위해, 전자가 원자핵 주위에 무질서하게 존재하는 것이 아니라 특정한 에너지 준위를 가진 궤도에만 있을 수 있다는 모형과 함께, 각 궤도가 가지는 에너지 준위를 다음과 같이 제시하였다.

$$E_n = -\frac{k}{n^2} \text{ (kJ/mol)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots ; k = \text{상수})$$

보어의 원자 모형을 이용하면 발머가 관찰하였던 수소 원자의 선 스펙트럼은 들뜬 전자가 L 전자껍질 ($n = 2$)로 전이하면서 방출하는 빛에 의한 것이라고 설명할 수 있다.

나

공유 결합 물질에서 공유 전자쌍이 그것을 더 세게 끌어당기는 원자에 속해 있다고 가정할 때, 각 원자에 할당된 전하수를 산화수라고 한다. 산화수는 공유 결합 물질의 원자 사이에 주고받는 전자의 수로 나타내며, 전자를 잃은 상태는 (+)부호를 붙여 나타내고, 전자를 얻은 상태는 (-)부호를 붙여 나타낸다.

다

화학 반응이 일어날 때 반응물을 이루는 원자 사이의 결합은 끊어지고 생성물을 이루는 원자 사이의 결합은 형성된다. 화학 반응에서 출입하는 열에너지를 엔탈피 변화 또는 반응 엔탈피(ΔH)라고 하고 결합 에너지를 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

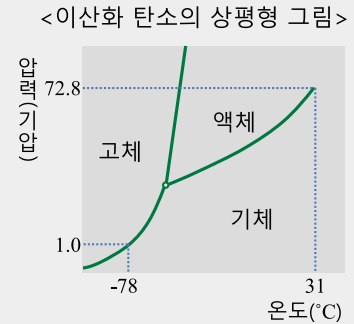
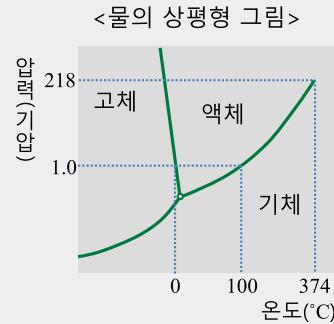
$$\Delta H \approx (\text{반응물의 결합 에너지 합}) - (\text{생성물의 결합 에너지 합})$$

1840년 헤스는 여러 화학 반응의 반응열을 측정하여 ‘반응열은 화학 반응이 한 단계에서 일어나든지 여러 단계에 걸쳐 일어나든지 같다’는 것을 발표하였는데, 이것을 헤스 법칙이라고 한다.

라

물질은 온도와 압력에 따라 상태가 변한다. 물질의 상태와 온도, 압력의 관계를 나타낸 그림을 상평형 그림이라고 하는데 다음은 물과 이산화 탄소의 상평형 그림을 나타낸 것이다. 고체, 액체, 기체의 세 가지 상이 평형을 이루며 함께 존재하는 점을

삼중점이라고 하는데, 물의 삼중점은 0.0098°C , 0.006기압 이고, 이산화 탄소의 삼중점은 -56.6°C , 5.1기압 이다.



[문제 4-1] 제시문 (가)에 근거하여 기체 상태의 수소 원자 1몰에서 전자를 떼어내는 데 필요한 이온화 에너지를 구하시오.
(단, 아보가드로수는 6.02×10^{23} 이다.) [10점]

[문제 4-2]

다음의 <표1>은 1기압에서 몇 가지 화합물의 물리적 특성을 나타낸 것이고 <표2>는 몇 가지 화학 결합의 결합 에너지를 나타낸 것이다.

<표1> 몇 가지 화합물의 물리적 특성

	끓는점 (°C)	기화열 (kJ/mol)
C ₃ H ₆	- 47.6	16
O ₂	- 183	6.82
H ₂ O	100	40.7
CO ₂	—	16.7

<표2> 몇 가지 화학 결합의 결합 에너지

결합	결합 에너지 (kJ/mol)	결합	결합 에너지 (kJ/mol)
H - H	440	C - O	350
C - H	410	C = O	800
C - C	350	O - H	460
C = C	610	O - O	140
C ≡ C	810	O = O	500

제시문 (나), (다), (라)에 근거하여 25°C, 1기압에서 프로펜(C₃H₆)의 연소 반응에 대한 화학 반응식을 완성하고 반응 엔탈피(ΔH)를 구하시오. 이때 반응물과 생성물에 있는 모든 탄소 원자의 산화수를 표시하시오. 또한, 25°C, 1기압에서 일어나는 프로펜 연소 반응에 대한 계의 엔트로피 증가 여부를 판별하고 그 이유를 설명하시오. [20점]

- 끝 -