2016학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	①	2	③	3	④	4	④	5	②
6	③	7	⑤	8	③	9	③	10	④
11	②	12	②	13	②	14	④	15	①
16	⑤	17	①	18	⑤	19	①	20	⑤
21	①	22	40	23	48	24	6	25	56
26	18	27	12	28	14	29	60	30	25

나형 정답

1	②	2	①	3	①	4	④	5	①
6	④	7	④	8	②	9	⑤	10	③
11	③	12	④	13	③	14	⑤	15	①
16	②	17	②	18	⑤	19	③	20	⑤
21	⑤	22	48	23	40	24	21	25	78
26	120	27	63	28	54	29	192	30	137

가형 해설

1. [출제의도] 순열의 수와 조합의 수 계산하기

${}_5\mathrm{P}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 = 5\times4 + \dfrac{5!}{3!\times2!} = 20+10 = 30$

2. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 극한값 계산하기

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = \lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{x}{e^x-1}\right\} = 1$

3. [출제의도] 벡터의 크기 계산하기

$\vec{a}+\vec{b} = (2,\ 3)$ 이므로 $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

4. [출제의도] 삼각함수의 정적분 계산하기

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)d\theta = \left[\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{4}$

6. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3}{4}$

이므로 $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{8}$

따라서 $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 8$

7. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2$, 주머니에서 2개의 검은 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$

흰 공을 적어도 1개 이상 꺼내는 사건을 A라 하면, 모두 검은 공을 꺼내는 사건은 A^C이다.

따라서 $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} = \dfrac{5}{7}$

8. [출제의도] 함수의 연속과 부정적분의 성질을 활용하여 문제해결하기

$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & (x \le -1) \\ x^3 + x + C_2 & (x > -1) \end{cases}$

($C_1,\ C_2$는 적분상수)에서

$f(-2) = \dfrac{1}{2} + C_1 = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $C_1 = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to-1-}f(x) = 1,\ \lim_{x\to-1+}f(x) = -2 + C_2$ 이고,

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$1 = -2 + C_2$에서 $C_2 = 3$

따라서 $f(0) = 3$

9. [출제의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2 = (2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 4|\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2$

$= 13 + 12\cos\theta = 16$

따라서 $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

10. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

타원의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$이라 하면 $25 - 9 = c^2$ 이므로 $c = 4$

$\overline{\mathrm{PF}} = m$, $\overline{\mathrm{PF'}} = n$이라 하면 타원의 정의에 의하여

$m + n = 10$

삼각형 $\mathrm{FPF'}$는 직각삼각형이므로 $m^2 + n^2 = 8^2$

$m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn$

$8^2 = 10^2 - 2mn$

$mn = 18$

따라서 삼각형 $\mathrm{FPF'}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}mn = 9$

11. [출제의도] 매개변수로 나타낸 함수의 미분 이해하기

점 $\mathrm{P}\left(2t+1,\ t+\dfrac{3}{t}\right)$이 그리는 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{3}{t^2}\right)$

곡선 위의 한 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{3}{t^2}\right) = -1$

$t = 1\ (t > 0)$

따라서 $a = 3,\ b = 4$에서 $a + b = 7$

12. [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제해결하기

휴대전화 1대의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(153,\ 2^2)$을 따른다.

Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,

$\mathrm{P}(151 \le X \le 154)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{151-153}{2} \le \dfrac{X-153}{2} \le \dfrac{154-153}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0.5)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.3413 + 0.1915 = 0.5328$

13. [출제의도] 좌표평면에서 직선의 방향벡터 이해하기

$\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{2},\ -4\right)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\dfrac{3}{2}(1,\ 3)$

$\vec{u}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 평행하므로 $\vec{u} = k(1,\ 3)$ (k는 실수)

$|\vec{u}| = \sqrt{10}$ 이므로 $10k^2 = 10$, $k = \pm1$

그러므로 $a = 1,\ b = 3$ 또는 $a = -1,\ b = -3$

따라서 $|a - b| = 2$

14. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분 계산하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$\displaystyle= \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3\frac{1}{x^2+x}dx$

$\displaystyle= \int_1^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^3 = \ln\frac{3}{2}$

15. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

y축과 평행한 한 직선을 $x = k$ (k는 실수)라 하고, 직선 $x = k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 AOB는 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$

$2^k = 4^{k-2}$

$2^k = 2^{2k-4}$

$k = 2k - 4,\ k = 4$

$\overline{\mathrm{OC}} = 4,\ \overline{\mathrm{AB}} = 32$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OC}} = 64$

16. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x) = \sin x - x\cos x$라 하면

$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 $0 \le k < \pi$
따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3이므로 합은 6

17. [출제의도] 역함수의 미분법 추론하기

$g\left(3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$ 에서

$3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}=g^{-1}(x)$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{\boxed{e^x+e^{2x}}}$$

이다.
$f(x)$의 도함수를 구하면

$$f'(x)=\frac{-e^x-2e^{2x}}{\left(\boxed{e^x+e^{2x}}\right)^2}$$

이다. $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ 이다.
그러므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'(0)}=\boxed{-\frac{4}{3}}$$

이다.

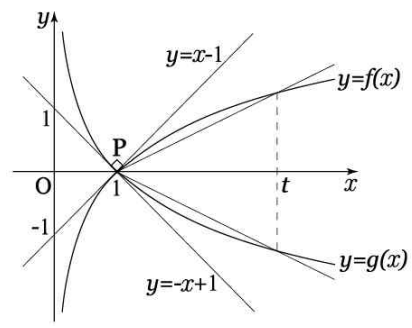
$h(x)=e^x+e^{2x}$, $p=-\dfrac{4}{3}$

따라서 $\left(-\dfrac{4}{3}\right)\times h(\ln 2)=-8$

18. [출제의도] 중복조합 이해하기
(ⅰ) a, b, c가 모두 짝수인 경우
${}_7\mathrm{H}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$
(ⅱ) a, b, c 중 1개만 짝수인 경우
짝수 1개를 선택하는 경우의 수는 7
홀수 8개 중 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{H}_2$
선택한 세 수를 크기순으로 나열하는 경우의 수는 1이므로 $7\times{}_8\mathrm{H}_2\times1=252$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 336

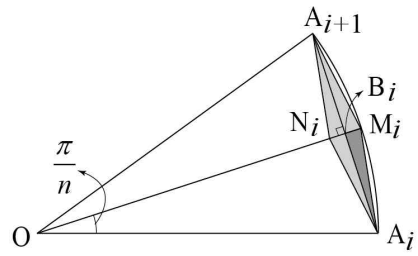
19. [출제의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기
조건 (가)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=2k$, $|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=3k\ (k>0)$ 라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5k$
조건 (나)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=40$
$2k\times5k=40$ 이므로 $k=2$ 이고 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=10$
조건 (다)에서 삼각형 ABC의 넓이는 30이므로
$\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=30$ 에서 $|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=6$
$\angle\mathrm{AHC}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=36$

20. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질 추론하기



ㄱ. $\ln x=\ln\dfrac{1}{x}$ 에서 $x=1$
점 P의 좌표는 (1, 0) (참)
ㄴ. $f'(1)=1$, $g'(1)=-1$ 이므로
$f'(1)\times g'(1)=1\times(-1)=-1$
그러므로 두 곡선 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다. (참)
ㄷ. $t>1$ 에서 함수 $f(t)$는 증가하고,
$f'(t)=\dfrac{1}{t}$ 이고 $f'(1)=1$ 이므로
$t>1$ 인 t에 대하여 $0<\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}<1$
$t>1$ 에서 함수 $g(t)$는 감소하고,
$g'(t)=-\dfrac{1}{t}$ 이고 $g'(1)=-1$ 이므로
$t>1$ 인 t에 대하여 $-1<\dfrac{g(t)-g(1)}{t-1}<0$
그러므로
$-1<\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}\times\dfrac{g(t)-g(1)}{t-1}<0$
$-1<\dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 삼각함수의 극한값 추론하기



선분 $\mathrm{M}_i\mathrm{N}_i$의 중점을 B_i라 하면
$\angle\mathrm{A}_i\mathrm{OM}_i=\dfrac{\pi}{n}$ 이므로
$\overline{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i}=\sin\dfrac{\pi}{n}$, $\overline{\mathrm{B}_i\mathrm{M}_i}=1-\overline{\mathrm{OB}_i}=1-\cos\dfrac{\pi}{n}$

$$\square\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i=4\times\triangle\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{B}_i$$
$$=4\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$S_n=n\times\square\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i=2n\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$n^2\times S_n=2n^3\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$
$$=2\pi^3\times\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi^3}{n^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$
$$=2\pi^3\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\times\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\right\}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2\times S_n)=\pi^3$

22. [출제의도] 이항정리 이해하기

$$(x^2+2)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}2^r=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r2^rx^{10-2r}$$

에서 $10-2r=6$, $r=2$
따라서 x^6의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times2^2=40$

23. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분 이해하기
$f'(x)=12\sec^2 2x$
따라서 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=12\sec^2\dfrac{\pi}{3}=12\times4=48$

24. [출제의도] 집합의 분할 이해하기
$S(4,\ 3)$은 원소의 개수가 4인 집합을 집합의 원소가 각각 2개, 1개, 1개인 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다.
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{2!}=6$

25. [출제의도] 곡선의 길이 이해하기
$y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$ 이므로

$$l=\int_0^{12}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{12}\sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx$$

$\sqrt{1+\dfrac{x}{4}}=t$ 라 놓으면
$1+\dfrac{x}{4}=t^2$, $\dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt}=2t$
$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=12$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$l=\int_1^2 8t^2\,dt=\left[\frac{8}{3}t^3\right]_1^2=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$$

따라서 $3l=56$

26. [출제의도] 확률의 곱셈정리를 활용하여 문제해결하기
A가 꺼낸 사탕이 딸기 맛 사탕일 사건을 E, B가 꺼낸 사탕이 포도 맛 사탕일 사건을 F라 하면
$\mathrm{P}(E)=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(F|E)=\dfrac{9}{14}$
그러므로
$p=\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F|E)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{9}{14}=\dfrac{9}{35}$
따라서 $70p=18$

27. [출제의도] 입체도형의 부피 이해하기
선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)=xe^x$
구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^{\ln6}xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_1^{\ln6}-\int_1^{\ln6}e^x\,dx$$
$$=\left[xe^x-e^x\right]_1^{\ln6}=-6+6\ln6$$

$a=6$, $b=6$
따라서 $a+b=12$

28. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기
포물선의 초점을 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ m(\alpha-4))$ $(\alpha>0)$라 하면, 점 $\mathrm{B}(-p,\ 0)$, 점 $\mathrm{C}(0,\ -4m)$ 이다.
삼각형 ABC의 무게중심이 점 F이므로
$\left(\dfrac{\alpha-p}{3},\ \dfrac{m\alpha-4m-4m}{3}\right)$에서

$\frac{\alpha-p}{3}=p$, $\frac{m\alpha-4m-4m}{3}=0$

$\alpha=4p$, $(\alpha-8)m=0$

$m>0$ 이므로 $\alpha=8$, $p=2$

점 A 에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A′라 하면, 포물선의 정의에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AA'}=10$

따라서 $\overline{AF}+\overline{BF}=14$

29. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제해결하기

구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다. 점 P 에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 O′라 하면 점 O′는 선분 AQ의 중점이고

$\angle ABQ=\frac{\pi}{2}$ 이므로 점 B는 점 O′를 중심으로 하고 반지름이 선분 AO′인 원 위의 점이다.

삼각형 BO′O 에서

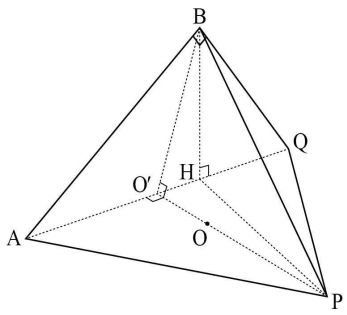
$\overline{O'B}=\sqrt{3}$, $\overline{OB}=2$, $\overline{OO'}=1$ 이므로

$\angle BO'O=\frac{\pi}{2}$

그러므로 $\overline{OO'}\perp\overline{O'B}$, $\overline{PO'}\perp\overline{O'B}$

$\overline{AO'}\perp\overline{PO'}$, $\overline{PO'}\perp\overline{O'B}$ 이므로 직선 PO′는 평면 ABQ 와 수직이고, 평면 ABQ 와 평면 APQ 는 수직이다.

그러므로 점 B 에서 선분 AQ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 삼각형 APB 의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH 이다.



삼각형 BO′P 는 직각삼각형이고 $\overline{O'B}=\sqrt{3}$, $\overline{O'P}=3$ 이므로 $\overline{PB}=2\sqrt{3}$

삼각형 APB 는 $\overline{PA}=\overline{PB}=2\sqrt{3}$ 인 이등변삼각형이고, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 APB 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{10}=2\sqrt{5}$

삼각형 ABQ 와 삼각형 AHB 는 닮음이므로

$\overline{AH}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

그러므로 삼각형 APH 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times3=2\sqrt{3}$

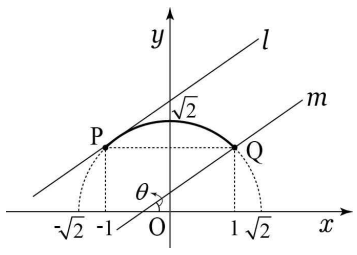
$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 APH의 넓이})}{(\text{삼각형 APB의 넓이})}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

따라서 $100\cos^2\theta=100\times\frac{3}{5}=60$

30. [출제의도] 삼각함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=\sqrt{2-x^2}\,(-1\le x\le1)$ 위의 양 끝점 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 각각 P, Q 라 하고, 직선 l의 y절편이 직선 m의 y절편보다 크다고 하자. 점 P 를 지나고 곡선 $y=\sqrt{2-x^2}$ 에 접하는 접선이 x축과 양의 방향으로 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

(ⅰ) $0\le\theta<\frac{\pi}{4}$일 때



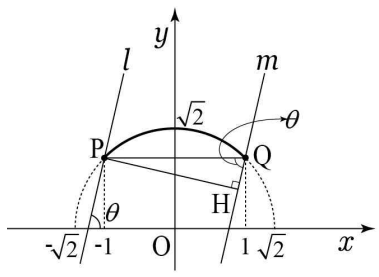
$f(\theta)$는 직선 l이 곡선과 접하고, 직선 m이 점 Q를 지날 때 점 Q 와 직선 l 사이의 거리이다. 곡선은 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의 일부이므로 곡선과 접하는 직선 l의 방정식은

$y=\tan\theta\,x+\sqrt{2}\sec\theta$ 이므로

$f(\theta)=\frac{|\tan\theta-1+\sqrt{2}\sec\theta|}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$

$=\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2}\ (\sin\theta-\cos\theta\ \ge\ -1)$

(ⅱ) $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 점 P를 지나고 직선 m이 점 Q를 지날 때 점 P 와 직선 m 사이의 거리와 같다. 즉, 점 P 에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $f(\theta)$는 선분 PH 의 길이와 같다.

$\angle PQH=\theta$ 이므로

$f(\theta)=2\sin\theta$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$f(\theta)=\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2} & \left(0\le\theta<\frac{\pi}{4}\right)\\ 2\sin\theta & \left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

함수 $f(\theta)$는 닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2})\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\,d\theta$

$=\left[-\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2}\,\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-2\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=1+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

$a=1$, $b=\frac{1}{4}$

따라서 $20(a+b)=25$

수학 영역

나형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$3\times27^{\frac{1}{3}}=3\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=3\times3=9$

2. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A\cap B=\{2,\ 3\}$ 이므로 모든 원소의 합은 5

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+1)=3$

4. [출제의도] 확률의 덧셈정리 이해하기

두 사건 A와 B는 서로 독립사건이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{12}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

따라서 $P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

5. [출제의도] 미분계수 계산하기

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f'(x)=2x+3$ 이므로 $f'(1)=5$

따라서 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=5$

6. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to-1-}f(x)=3$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=4$

7. [출제의도] 명제와 조건 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x\ge a\}$

$Q=\{x\,|\,1\le x\le3$ 또는 $x\ge7\}$

명제 $p\to q$가 참이므로 $P\subset Q$ 에서 $a\ge7$

따라서 a의 최솟값은 7

8. [출제의도] 정적분 계산하기

$\int_0^1(ax^2+1)dx=\left[\frac{ax^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{a}{3}+1=4$

따라서 $a=9$

9. [출제의도] 기댓값의 성질 이해하기

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{2}=\frac{8}{3}$

따라서 $E(6X+1)=6E(X)+1=17$

10. [출제의도] 함수의 성질 이해하기

조건 (가)에 의하여 함수 f의 치역은

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고

조건 (나)와 $f(1)+f(4)=7$에 의하여

$f(1)=4$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=3$

따라서 $f(1)+f^{-1}(1)=4+2=6$

11. [출제의도] 자연수의 분할을 활용하여 문제 해결하기

같은 종류의 접시 3개에 같은 종류의 쿠기 10개를 남김없이 나누어 담는 방법의 수는 10을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(10,\ 3)$과 같다.

10을 3개의 자연수로 분할하는 방법은

$10=8+1+1=7+2+1=6+3+1=6+2+2$
$\quad=5+4+1=5+3+2=4+4+2=4+3+3$

따라서 구하는 방법의 수는 8

12. [출제의도] 유리함수와 무리함수 이해하기

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 증가하므로 $A=\{y\,|\,0\le y\le 1\}$

$p>0$이므로 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 감소하고 $A=B$이므로 $g(-1)=1,\ g(0)=0$

$\dfrac{p}{-2}+q=1,\ -p+q=0$이므로 $p=2,\ q=2$

따라서 $p+q=4$

13. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$S_n=-n^2+6n$

$a_6=S_6-S_5$

따라서 $a_6=-5$

14. [출제의도] 여사건의 확률을 활용하여 문제 해결하기

모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $5\times5=25$이다.

직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=f(x)$와 만나지 않는 사건을 E라 하면 사건 E의 여사건 E^C는 직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 사건이다.

직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=f(x)$가 만나기 위해서는 방정식 $-\dfrac{1}{2}x^2+3x=ax+b$가 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2(a-3)x+2b=0$에서

$\dfrac{D}{4}=(a-3)^2-2b\ge0$

위 부등식을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2)$

이므로 직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=f(x)$가 서로 만날 확률은 $\dfrac{4}{25}$이므로 $\mathrm{P}(E^C)=\dfrac{4}{25}$

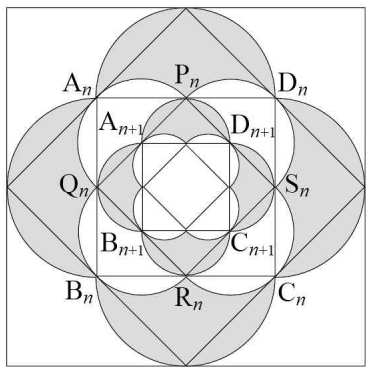
$\mathrm{P}(E)=1-\mathrm{P}(E^C)=1-\dfrac{4}{25}=\dfrac{21}{25}$

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E)=\dfrac{21}{25}$

15. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기

$T_1=$(도형 E_1의 넓이)$-$(도형 F_1의 넓이)
$\quad=(2\pi+4)-(\pi+2)=\pi+2$

그림은 G_{n+1}의 일부이다.



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$\overline{A_nC_n}=\overline{A_nA_{n+1}}+\overline{A_{n+1}C_{n+1}}+\overline{C_{n+1}C_n}$

$\sqrt{2}\,a_n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{a_n}{2}+\sqrt{2}\,a_{n+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{a_n}{2}$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

그림 G_{n+1}의 새로 색칠된 부분의 넓이를 b_{n+1}이라 하면

$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n,\ b_1=T_1$

그러므로 T_n은 첫째항이 $\pi+2$이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{\pi+2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}(\pi+2)$

16. [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제 해결하기

휴대전화 1대의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(153,2^2)$을 따른다.

Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,

$\mathrm{P}(151\le X\le154)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{151-153}{2}\le\dfrac{X-153}{2}\le\dfrac{154-153}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0.5)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$

$=0.3413+0.1915=0.5328$

17. [출제의도] 중복조합을 활용하여 추론하기

네 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 홀수가 2개인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$

$a,\ b,\ c,\ d$ 중 두 홀수를 $2x+1,\ 2y+1$, 두 짝수를 $2z+2,\ 2w+2$라 하자.

(단, $x,\ y,\ z,\ w$는 음이 아닌 정수)

$(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)+(2w+2)=12$

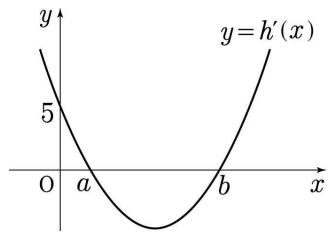
$x+y+z+w=3$

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

따라서 $6\times20=120$

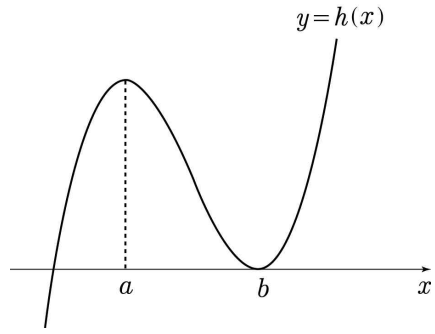
18. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

함수 $y=h'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를 만족시키는 γ가 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에 존재한다.

열린 구간 $(0,\ b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$ 이므로

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$

$h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. [출제의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, 등식

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2=\frac{m^2(2m^2+1)}{3}$

이 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)(2m+3-2k)^2$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2+\boxed{2m+1}$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$

$\displaystyle\quad+\boxed{8}\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)+\boxed{2m+1}$

$\displaystyle=\frac{(m+1)^2\times\{2(m+1)^2+1\}}{3}$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

$f(m)=2m+1$이고

$(2m+3-2k)^2$

$=(2m+1-2k+2)^2$

$=(2m+1-2k)^2+4(2m+1-2k)+4$

$=(2m+1-2k)^2+8(m+1-k)$

이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$

$\displaystyle\quad+8\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)$

에서 $p=8$

따라서 $f(3)+p=7+8=15$

20. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f'(x)=xg(x)$, $f'(x)-g'(x)=4x^3+2x$ 이므로

$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$

함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 4인

이차함수이므로 $g(x)=4x^2+ax+b$

$g'(x)=8x+a$ 이므로

$x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$

$4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x$ 에서

$a=0$, $b=10$ 이므로 $g(x)=4x^2+10$

따라서 $g(1)=14$

21. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기

1을 네 번 이상 사용하면 반드시 1끼리 서로 이웃하게 되므로 1은 세 번 이하로 사용된다.

(ⅰ) 1이 사용되지 않는 경우

$2^4=16$

(ⅱ) 1이 한 번 사용되는 경우

1로 시작되는 경우의 수는 $2^4=16$

2로 시작되는 경우의 수는 $4\times2^3=32$

(ⅲ) 1이 두 번 사용되는 경우

1로 시작되는 경우의 수는 $3\times2^3=24$

2로 시작되는 경우의 수는 $3\times2^2=12$

(ⅳ) 1이 세 번 사용되는 경우

첫 번째, 세 번째, 다섯 번째에는 반드시 1이 사용되므로 $2^2=4$

따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 104

22. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=3$, $a_6=ar^5=12$ 이므로 $r^4=4$

따라서 $a_{10}=ar^9=ar\times(r^4)^2=3\times16=48$

23. [출제의도] 이항정리 이해하기

$$(x^2+2)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}2^r=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r2^rx^{10-2r}$$

에서 $10-2r=6$, $r=2$

따라서 x^6의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_2\times2^2=40$

24. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_c a:\log_c b=2:3$이므로

$\log_c a=2k$, $\log_c b=3k$라 하자.

(단, k는 0이 아닌 실수)

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{3k}{2k}=\frac{3}{2}$$

따라서 $10\log_a b+9\log_b a=10\times\frac{3}{2}+9\times\frac{2}{3}=21$

25. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기

동호회 회원 중 임의로 한 명을 선택했을 때 이 회원이 남성일 사건을 E, A회사에서 출시한 배드민턴 라켓을 구매한 회원일 사건을 F라 하면

$$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{39}{70}}{\frac{45}{70}}=\frac{13}{15}$$

따라서 $p=\frac{13}{15}$이므로 $90p=78$

26. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 일반항은

$a_n=3+(n-1)d$

$a_{5n}-a_n=4dn$ 이므로

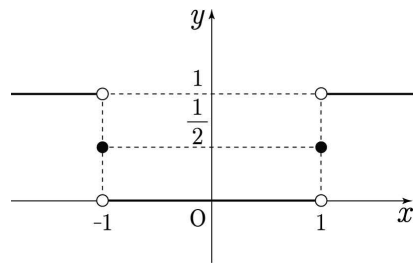
$$\sum_{n=1}^{10}4dn=4d\times\frac{10\times11}{2}=220d=440$$

$d=2$ 이므로 $a_n=2n+1$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(2n+1)=120$

27. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 문제해결하기

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-1$, 1에서 불연속이다.

함수 $g(x)=x^2+ax+b$라 하면

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이다.

$x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$

$\frac{1}{2}(1+a+b)=1(1+a+b)=0$에서

$a+b=-1$ …… ㉠

$x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)g(-1)=\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)$

$\frac{1}{2}(1-a+b)=0=1(1-a+b)$에서

$a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=0$, $b=-1$이므로

$g(x)=x^2-1$

따라서 $g(8)=63$

28. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$f(1)=g(1)$ 이고 $f(-1)=f(1)=1$ 이므로

$f(-1)=g(-1)=1$

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 -1, 1이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=27$ 이므로

$-1\le x\le1$에서 $f(x)\ge g(x)$이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 y축 대칭이므로 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 y축 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx=54$$

따라서 구하는 넓이는 54

29. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

원 O_n이 직선 AB와 점 P_n에서 접하므로

직선 AB와 직선 $\mathrm{O}_n\mathrm{Q}_n$은 서로 수직이다.

직선 l과 직선 BC가 평행이므로

$\angle\mathrm{Q}_n\mathrm{AB}=\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$

두 직각삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n$과 $\mathrm{AP}_n\mathrm{O}_n$은 합동이므로

$$\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{O}_n}=2\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{O}_n}=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

직각삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{O}_n$에서

$\frac{\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n}}{\overline{\mathrm{AP}_n}}=\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\overline{\mathrm{BP}_n}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AP}_n}=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$k=\lim_{n\to\infty}2^nS_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{3}\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=8\sqrt{3}$$

따라서 $k^2=192$

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}f(x+1)-1 & (-1\le x<0)\\ f(x) & (0\le x<1)\\ f(x-1)+1 & (1\le x<2)\\ \vdots & \\ f(x-4)+4 & (4\le x<5)\end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=\lim_{x\to1-}g(x)$이다.

$g(1)=f(0)+1$ 이고

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)=1$이므로

$f(0)+1=1$에서 $f(0)=0$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$이다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)+1-g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\text{이고}$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$$

이므로 $f'(0)=1$ …… ㉡

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하자.

㉠, ㉡에 의하여 $c=1$, $d=0$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=1+a+b+1=1$ …… ㉢

$f'(1)=4+3a+2b+1=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $a=-2$, $b=1$

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$

$$\int_0^4g(x)dx=\int_0^1g(x)dx+\int_1^2g(x)dx+\int_2^3g(x)dx+\int_3^4g(x)dx$$

$$=\frac{8}{15}+\left(\frac{8}{15}+1\right)+\left(\frac{8}{15}+2\right)+\left(\frac{8}{15}+3\right)=\frac{122}{15}$$

그러므로 $p=15$, $q=122$

따라서 $p+q=137$