

2015학년도 7월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

수학 영역

A형 정답

1	③	2	①	3	②	4	④	5	⑤
6	②	7	④	8	③	9	④	10	⑤
11	③	12	②	13	①	14	⑤	15	①
16	②	17	②	18	⑤	19	④	20	①
21	③	22	3	23	10	24	11	25	14
26	9	27	165	28	88	29	27	30	45

A형 해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 8 = 3$$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$$A + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 13

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+11)}{x} = 11$$

4. [출제의도] 조건부확률 이해하기

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

5. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 20$$

6. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 추론하기

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n+2^n) - \{(n-1) + 2^{n-1}\} \\ = 2^{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$$

따라서 $a_6 = 33$

7. [출제의도] 함수의 좌극한과 우극한 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = 0 + 1 = 1$$

8. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

x, y 에 대한 연립일차방정식이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & a+2 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ 의 역행렬이

존재하지 않아야 하므로

$$(a-1)(a+1) - (a+2) = 0$$

$$a^2 - a - 3 = 0$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은 -3

9. [출제의도] 이항정리 이해하기

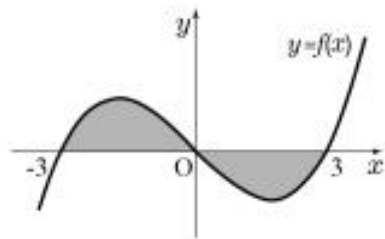
다항식 $(1+3x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r \cdot 1^{5-r} \cdot (3x)^r \quad (r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

따라서 $r=3$ 일 때 x^3 의 계수는 270

10. [출제의도] 정적분과 넓이 이해하기

$$f(x) = x^3 - 9x = x(x-3)(x+3)$$



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-3}^3 |f(x)| dx = 2 \int_{-3}^0 f(x) dx \\ = 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-3}^0 = \frac{81}{2}$$

11. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$2^x = t$ ($t > 0$)이라 하면

$$t^2 - 10t + 16 \leq 0, \quad 2 \leq t \leq 8$$

$$2 \leq 2^x \leq 2^3, \quad 1 \leq x \leq 3$$

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 6

12. [출제의도] 미분을 활용하여 추론하기

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 4 - k$ 라 하면

$$f'(x) = 3(x+3)(x-1)$$

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	$31-k$ (극댓값)	\searrow	$-1-k$ (극솟값)	\nearrow

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-3)f(1) < 0$ 이어야 하므로

$$(31-k)(-1-k) < 0$$

$$-1 < k < 31$$

따라서 모든 정수 k 의 개수는 31

13. [출제의도] 등차수열 이해하기

두 점 A, B의 x 좌표는 각각 $-\sqrt{k}, \sqrt{k}$

세 수 $-\sqrt{k}, \sqrt{k}, 3$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2\sqrt{k} = -\sqrt{k} + 3, \sqrt{k} = 1$

따라서 $k = 1$

14. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$f'(x) = 2x$ 이고 $f'(1) = 2$ 이므로

점 P(1, 1)에서의 접선 l 의 방정식은

$$y = 2x - 1$$

점 Q의 좌표를 (a, b) 라 하면 $b = 2a - 1$

직선 l 에 곡선 $y = g(x)$ 가 접하므로

$$g'(x) = -2x + 6$$

$$g'(a) = -2a + 6 = 2$$

$$a = 2, b = 3 \text{이므로 점 Q(2, 3)}$$

$$g(2) = 3 \text{이므로 } k = 4$$

원점으로부터 가까운 점을 R라 하면

$$R(1, 0), S(5, 0)$$

따라서 삼각형 QRS의 넓이는 6

15. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수 이해하기

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 12x^3 + 4x$$

$$xf'(x) = 12x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4$$

$$f(x) = 4x^3 - 4x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$x = 1 \text{일 때, } \int_1^1 f(t)dt = 1 \cdot f(1) - 3 + 2 = 0$$

$$f(1) = 1 \text{이므로 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(0) = 1$$

16. [출제의도] 로그방정식을 활용하여 문제해결하기

$$\log C_A = 3 - \log V_0 + \log W_0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\log C_B = 3 - \log \frac{1}{9} V_0 + \log \frac{1}{27} W_0 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의하여 } \log \frac{C_A}{C_B} = \log \frac{1}{9} - \log \frac{1}{27} = \log 3$$

$$\text{따라서 } \frac{C_A}{C_B} = k \text{이므로 } k = 3$$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$ 로 나누면

$$\frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{3n-2a_n}{a_n}$$

이다. $b_n = \frac{n}{a_n}$ 이라 하면

$$b_{n+1} = 3b_n + \boxed{(-2)}$$

이고, $b_{n+1} - 1 = 3(b_n - 1)$ 이다.

$b_1 = 4$ 이므로 수열 $\{b_n - 1\}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열이다.

$$b_n - 1 = \boxed{3^n}$$

$$b_n = \boxed{3^n} + 1$$

이다. 그러므로

$$a_n = \frac{n}{\boxed{3^n} + 1} \quad (n \geq 1)$$

이다.

$$p = -2, f(n) = 3^n$$

$$\text{따라서 } -2 + f(3) = 25$$

18. [출제의도] 역행렬의 성질을 활용하여 추론하기

$$\neg. \frac{1}{2}A(B-E) = E = (B-E)\left(\frac{1}{2}A\right) \text{이므로}$$

$$AB - A = BA - A$$

$$AB = BA \quad (\text{참})$$

$$\neg. BA^2 - A^2 + B = -E$$

$$(BA - A)A + B = -E$$

$$\neg \text{에 의하여 } (AB - A)A + B = -E$$

$$2A + B = -E \quad (\text{참})$$

$$\neg. \neg \text{에 의하여 } B = -2A - E$$

$$A(-2A - E) - A = 2E$$

$$-A^2 - A = E$$

$$-A(A + E) = E$$

그러므로 $A + E$ 의 역행렬은 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 \neg, \neg, \neg

19. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 문제해결하기

$$f(x-1) = \begin{cases} -x & (x \leq 1) \\ 2x-2+a & (x > 1) \end{cases}$$

$$g(x) = f(x)f(x-1)$$

$$= \begin{cases} (-x-1)(-x) & (x \leq 0) \\ (2x+a)(-x) & (0 < x \leq 1) \\ (2x+a)(2x-2+a) & (x > 1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기

위하여 $x=0$, $x=1$ 에서도 연속이 되어야 한다.
(i) $x=0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow -0} g(x) = g(0) = \lim_{x \rightarrow +0} g(x) \text{이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 a 의 값에 관계없이
 $x=0$ 에서 연속이다.

(ii) $x=1$ 일 때

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되려면

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} g(x)$$

$$-(a+2) = (a+2)a, (a+1)(a+2) = 0$$

$$a \neq -1 \text{ 이므로 } a = -2$$

20. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기
마름모의 성질에 의하여 마름모 ADEF의
두 대각선이 만나는 점과 원의 중심이 일치하므로
 $\overline{OE} = \frac{1}{2} \overline{AE} = 2\sqrt{3}$

$$\angle EOP = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로 } \overline{OP} = \sqrt{3}, \overline{PE} = 3$$

$$\text{사각형 OPEQ의 넓이 } S_1 = 3\sqrt{3}$$

그림 R_n 에서 새로 그려진 정삼각형의 한 변의
길이를 a_n 이라 하면

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

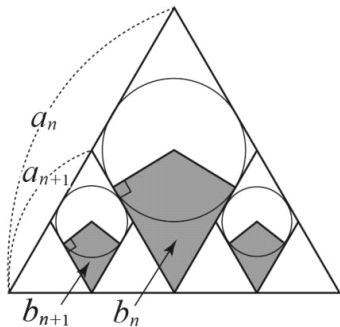


그림 R_n 에 색칠한 한 개의 사각형의 넓이를
 b_n 이라 하면

$$b_{n+1} = \frac{1}{4} b_n$$

그림 R_{n+1} 에서 새로 그려진 사각형의 개수는 그
림 R_n 에서 새로 그려진 사각형의 개수의 2배이다.

그러므로 S_n 은 첫째항이 $3\sqrt{3}$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인
등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이다.

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\sqrt{3}$$

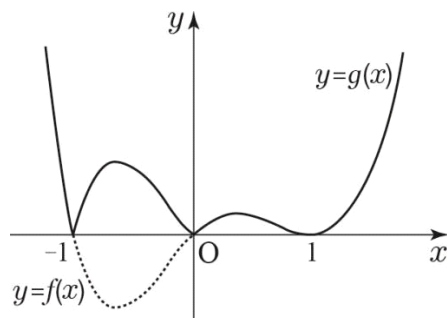
21. [출제의도] 미분을 활용하여 문제해결하기

$$g(1) = g'(1) \text{ 이고 } x=1 \text{ 에서 극솟값을 가지므로}$$

$$g(1) = g'(1) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } f(1) = f'(1) = 0$$

$g(x)$ 는 $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ 에서 극솟값을
가지므로



$$f(x) = (x-1)^2 x (x+1)$$

$$g(x) = |(x-1)^2 x (x+1)|$$

$$\text{따라서 } g(2) = 6$$

22. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n + 2^n}{5^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 3$$

23. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기
그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는
행렬의 모든 성분의 합은
(그래프의 변의 개수) $\times 2$

$$\text{따라서 } 5 \times 2 = 10$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(참고)

24. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3)$$

$$f'(x) = 2x + 5 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 11$$

25. [출제의도] 무한급수 이해하기

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{84}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 84 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 42 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = 14$$

26. [출제의도] 독립시행을 활용하여 문제해결하기

$$p_1 = {}_4C_2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{8}{27}$$

$$p_2 = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{p_1 p_2} = 9$$

27. [출제의도] 계차수열을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{n+1} - a_n = 3n + 3$ 이므로

$$a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k+3) = \frac{3n(n+1)}{2} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{따라서 } a_{10} = 165$$

28. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

직선 $x=2$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 y 좌
표가 p 이므로 $p = k^2 \log 2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q의 y 좌표가 p 이므로

$$k^2 \log 2 = k \log a \text{를 정리하면 } a = 2^k$$

직선 $x=2$ 와 곡선 $y=h(x)$ 의 만나는 점의 y 좌

$$\text{표가 } q \text{이므로 } q = 4k^2 \log 2$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 R의 y 좌표가 q 이므로

$$4k^2 \log 2 = k^2 \log b \text{를 정리하면 } b = 2^4$$

세 점 P(2, 0), Q(2^k , $k^2 \log 2$), R(2^4 , $4k^2 \log 2$)가
한 직선 위에 있으므로

$$\frac{k^2 \log 2}{2^k - 2} = \frac{4k^2 \log 2}{14} \text{를 정리하면 } 2^k = \frac{11}{2}$$

$$a = \frac{11}{2}, b = 16$$

$$\text{따라서 } ab = 88$$

29. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 문제해결하기

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 상수})$$

라 하면

$$\text{조건 (가)에 의하여 } c = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{ 에서}$$

$$\text{조건 (나)에 의하여 } a = -6$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b = 3(x-2)^2 + b - 12$$

$$\text{조건 (다)에 의하여 } b \geq 9 \text{ 이고}$$

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + bx) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{b}{2} x^2 \right]_0^3$$

$$= -\frac{135}{4} + \frac{9b}{2} \geq \frac{27}{4} \quad (\because b \geq 9)$$

$$b = 9 \text{ 일 때, 최솟값 } m = \frac{27}{4}$$

$$\text{따라서 } 4m = 27$$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개
의 바둑돌을 나열한 경우는

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \text{ 또는 } \circ \bullet \bullet \bullet \bullet$$

(i) $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$ 인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1
개의 \circ 를 나열되어 있는 \circ 에 이웃하도록 나
열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새
로운 4개의 \bullet 를 나열되어 있는 \bullet 에 이웃하
도록 나열하면 되므로

$${}_2C_1 \times {}_{3+4-1}C_4 = {}_2C_1 \times {}_6C_4 = 30$$

(ii) $\circ \bullet \bullet \bullet \circ$ 인 경우

같은 방법으로

$${}_3C_1 \times {}_{2+4-1}C_4 = {}_3C_1 \times {}_5C_4 = 15$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 모든 경우의
수는 45