• 2교시 수학 영역 •

[A 형]

1	②	**2**	③	**3**	⑤	**4**	②	**5**	③
6	①	**7**	⑤	**8**	③	**9**	④	**10**	⑤
11	④	**12**	①	**13**	④	**14**	③	**15**	①
16	④	**17**	⑤	**18**	②	**19**	③	**20**	②
21	①	**22**	10	**23**	8	**24**	3	**25**	30
26	15	**27**	5	**28**	123	**29**	16	**30**	65

1. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산하기

$4^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{3}}=2\times 2=4$

2. [출제의도] 행렬의 실수배와 덧셈 계산하기

$A+2B=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\4&3\end{pmatrix}$

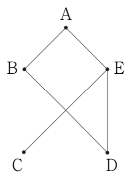
따라서 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은 13

3. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times 6^{n+1}+3}{6^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\times 6+\dfrac{3}{6^n}\right)=12$

4. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계 이해하기

그림과 같이 주어진 그래프의 꼭짓점을 A, B, C, D, E라 할 때, 그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}\mathrm{A}&\mathrm{B}&\mathrm{C}&\mathrm{D}&\mathrm{E}\end{array}\\ \begin{array}{c}\mathrm{A}\\\mathrm{B}\\\mathrm{C}\\\mathrm{D}\\\mathrm{E}\end{array} & \begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

따라서 행렬의 성분 중 1의 개수는 10

[다른 풀이]

그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로 $5\times 2=10$

5. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_5 27\times\log_3 5=\dfrac{\log 27}{\log 5}\times\dfrac{\log 5}{\log 3}$

$=\dfrac{3\log 3}{\log 5}\times\dfrac{\log 5}{\log 3}=3$

6. [출제의도] 지수함수 이해하기

$y=a\times 2^x$에 $(0,4)$를 대입하면

$4=a\times 2^0=a\times 1=a$

$\therefore\ a=4$

$y=4\times 2^x$에 $(b,16)$을 대입하면

$16=4\times 2^b$

$\therefore\ b=2$

따라서 $a+b=4+2=6$

7. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=6$ …… ㉠

$a_4+a_6=a+3d+a+5d=2a+8d=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=2,\ d=2$

따라서 $a_7=2+6\times 2=14$

8. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\dfrac{3n+1}{n}\right)$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{3n+1}{n}\right)=0$

$a_n-\dfrac{3n+1}{n}=b_n$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이고 $a_n=b_n+\dfrac{3n+1}{n}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n+\dfrac{3n+1}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}b_n+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n}=3$

9. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\sum\limits_{k=2}^{m}a_{k+1}=\sum\limits_{k=2}^{m}\{2(k+1)-3\}$

$=\sum\limits_{k=2}^{m}(2k-1)$

$=\sum\limits_{k=1}^{m}(2k-1)-(2\times 1-1)$

$=2\times\dfrac{m(m+1)}{2}-m-1$

$=m^2-1=48$

따라서 $m=7$

10. [출제의도] 알고리즘과 순서도를 활용하여 추론하기

n	S
1	10
2	10+9
3	10+9+8
4	10+9+8+7
5	10+9+8+7+6
6	10+9+8+7+6+5

따라서 인쇄되는 S의 값은 $10+9+8+7+6+5=45$

11. [출제의도] 함수의 우극한과 좌극한 이해하기

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)=-2$이므로 $a=-2$

$x+3=t$라 하면 $x\to -2+0$일 때, $t\to 1+0$이므로

$\lim\limits_{x\to -2+0}f(x+3)=\lim\limits_{t\to 1+0}f(t)=1$

12. [출제의도] 로그방정식 이해하기

(가)에서 $\log ab=2$이므로 $\log a+\log b=2$

(나)에서 $\log a\times\log b=-3$

$\log a$, $\log b$를 두 근으로 하는 이차방정식은

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$t=3$ 또는 $t=-1$

$\log a=-1,\ \log b=3$ $(\because\ a<b)$

따라서 $\log\dfrac{b}{a}=\log b-\log a=3-(-1)=4$

13. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

점 P_n은 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}\,x$가 만나는 점이므로 $x^2=\sqrt{n}\,x$

$x=\sqrt{n}$ $(\because\ x>0)$

$\therefore\ \mathrm{P}_n(\sqrt{n},\,n)$

$\mathrm{P}_4(2,4)$에서 $a=2,\ b=4$

$\begin{pmatrix}k&2\\4&k-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬

$\begin{pmatrix}k&2\\4&k-2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$k(k-2)-8=0$

$k^2-2k-8=0$

$(k-4)(k+2)=0$

$\therefore\ k=4$ 또는 $k=-2$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 -8

14. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

점 $\mathrm{P}_n(\sqrt{n},\,n)$을 지나고 직선 $y=\sqrt{n}\,x$와 수직인 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}(x-\sqrt{n})+n$이므로

$\mathrm{Q}_n\left((n+1)\sqrt{n},\,0\right)$, $\mathrm{R}_n(0,\,n+1)$

$S_n=\dfrac{1}{2}\times(n+1)\sqrt{n}\times(n+1)$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{5}\dfrac{2S_n}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{5}\left\{\dfrac{2}{\sqrt{n}}\times\dfrac{(n+1)^2\sqrt{n}}{2}\right\}$

$=\sum\limits_{n=1}^{5}(n+1)^2=\sum\limits_{n=1}^{5}(n^2+2n+1)$

$=\dfrac{5\times 6\times 11}{6}+2\times\dfrac{5\times 6}{2}+5=90$

15. [출제의도] 지수부등식 이해하기

ⅰ) $2^x-32>0$이고 $\dfrac{1}{3^x}-27>0$일 때,

$2^x>32$이므로 $x>5$

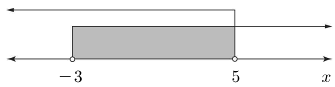
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$이므로 $x<-3$

$\therefore$ 해가 없다.

ⅱ) $2^x-32<0$이고 $\dfrac{1}{3^x}-27<0$일 때,

$2^x<32$이므로 $x<5$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$이므로 $x>-3$



$\therefore\ -3<x<5$

ⅰ), ⅱ)에서

$-3<x<5$를 만족시키는

정수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 개수는 7

16. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

임피던스가 8인 스피커를 저항이 5인 접속 케이블로 연결하여 작동시켰을 때의 전송 손실은 저항이 a인 접속 케이블로 교체하여 작동시켰을 때의 전송 손실의 2배이므로

$10\log\left(1+\dfrac{2\times 5}{8}\right)=2\times 10\log\left(1+\dfrac{2a}{8}\right)$

$\log\dfrac{9}{4}=\log\left(1+\dfrac{2a}{8}\right)^2$

$\left(1+\dfrac{a}{4}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

$1+\frac{a}{4}=\frac{3}{2}$ ($\because$ $a>0$)

따라서 $a=2$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$2S_n=3a_n-4n+3$ …… ㉠

에서 $n=1$일 때, $2S_1=3a_1-1$이므로

$a_1=1$

$2S_{n+1}=3a_{n+1}-4(n+1)+3$ …… ㉡

㉡ − ㉠을 하면

$2(S_{n+1}-S_n)=3a_{n+1}-3a_n-4$

$2a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n-4$

$a_{n+1}=3a_n+\boxed{4}$

$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$

이다. 수열 $\{a_n+2\}$는 첫째항이 a_1+2, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n+2=(a_1+2)\times 3^{n-1}$

일반항 a_n을 구하면

$a_n=3\times 3^{n-1}-2=\boxed{3^n-2}$ $(n\geq 1)$

이다.

$\therefore$ $p=4$, $f(n)=3^n-2$

따라서 $p+f(5)=4+(3^5-2)=245$

18. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 A는 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 만나는 점이므로 $-x^2+6=x$

$x=2$ ($\because$ $x>0$)

$\therefore$ $\mathrm{A}(2,2)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=2-a$

$\overline{\mathrm{PR}}=-a^2+6-a$

$$\therefore \lim_{a\to 2-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\lim_{a\to 2-0}\frac{2-a}{-a^2-a+6}$$

$$=\lim_{a\to 2-0}\frac{2-a}{(a+3)(2-a)}$$

$$=\lim_{a\to 2-0}\frac{1}{a+3}=\frac{1}{5}$$

19. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $AB+E=A^2$에서 $A(A-B)=E$이므로

$A^{-1}=A-B$

$\therefore$ A의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $A(A-B)=(A-B)A=E$이므로

$A^2-AB=A^2-BA$

$\therefore$ $AB=BA$ (참)

ㄷ. $AB^3-BA^3=(B^2-A^2)AB$

$=(B+A)(B-A)AB$

$=-(B+A)B$

$=-B^2-AB$

$=-B^2-(A^2-E)$

$=-B^2-A^2+E=6E$

$\therefore$ $A^2+B^2=-5E$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

20. [출제의도] 무한수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

그림과 같이 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 원의 중심을 $\mathrm{C}_n(r_n, r_n)$이라 하고 내접하는 원이 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 세 변과 만나는 점을 각각 D_n, E_n, F_n이라 하자.

$\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n\mathrm{C}_n \backsim \triangle\mathrm{B}_n\mathrm{OP}_n$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}:\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{O}}=\overline{\mathrm{F}_n\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{OP}_n}$

$n+1-r_n:n+1=r_n:\overline{\mathrm{OP}_n}$

$\overline{\mathrm{OP}_n}=\frac{(n+1)r_n}{n+1-r_n}$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{A}_n}$이고

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{E}_n}+\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n}$이므로

$(n+1-r_n)+(n-r_n)=\sqrt{2n^2+2n+1}$

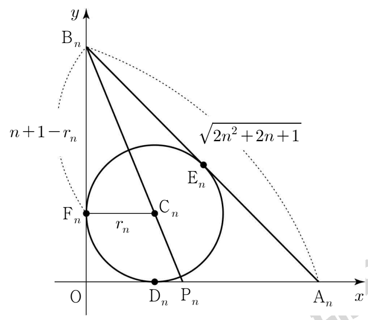
$r_n=\frac{1}{2}\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 계산하면

$$\overline{\mathrm{OP}_n}=\frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{1+\sqrt{2n^2+2n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{n\left(1+\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$



21. [출제의도] 등비수열을 활용하여 추론하기

종이 ABCD를 접는 선은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이므로, S_1을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의 합은 $4\sqrt{2}$이다.

S_1을 접는 선은 한 변의 길이가 1인 정사각형이고 종이가 2겹이므로, S_2를 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 8이다.

S_2를 접는 선은 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 정사각형이고 종이가 4겹이므로, S_3을 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 $8\sqrt{2}$이다.

그러므로 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

따라서 S_n을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의 합 l_n은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 제n항까지의 합이다.

$$\therefore\ l_5=\frac{4\sqrt{2}\times\{(\sqrt{2})^5-1\}}{\sqrt{2}-1}=24+28\sqrt{2}$$

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+6)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+6)=10$$

23. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A^{-1})^2$의 모든 성분의 합은 8

24. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$2^x=t$ $(t>0)$라 하면

$t^2+8t-128=0$

$(t-8)(t+16)=0$

$\therefore$ $t=8$

따라서 $x=3$

25. [출제의도] 로그함수 그래프의 평행이동 이해하기

함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 a, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프의 방정식은 $y=\log(x-a)+b$이다.

함수 $y=\log(x-a)+b$의 그래프는 점 $(4,b)$를 지나므로

$\log(4-a)+b=b$

$\log(4-a)=0$

$4-a=1$

$\therefore$ $a=3$

함수 $y=\log(x-3)+b$의 그래프는 점 $(13,11)$을 지나므로

$\log 10+b=11$

$\therefore$ $b=10$

따라서 $ab=30$

26. [출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

수열 $\{a_n\}$은

$a_1=36$, 계차수열의 일반항이 $2n-14$인 수열이다.

$a_n=36+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-14)=n^2-15n+50$

$a_n=n^2-15n+50=6$

$n^2-15n+44=0$

$(n-4)(n-11)=0$

$\therefore$ $n=4$ 또는 $n=11$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 15

27. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

점 A_n은 곡선 $y=\log_2 x+1$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2 x+1=n$

$x=2^{n-1}$ $\therefore$ $\mathrm{A}_n(2^{n-1},n)$

점 B_n은 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2 x=n$

$x=2^n$ $\therefore$ $\mathrm{B}_n(2^n,n)$

점 C_n은 곡선 $y=\log_2(x-4^n)$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2(x-4^n)=n$

$x=2^n+4^n$ $\therefore$ $\mathrm{C}_n(2^n+4^n,n)$

$S_n=\frac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$, $T_n=\frac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$

$$\therefore\ \frac{T_n}{S_n}=\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}=\frac{2^n+4^n-2^n}{2^n-2^{n-1}}$$

$$=\frac{4^n}{(2-1)\times 2^{n-1}}$$

$$=2^{n+1}=64$$

따라서 $n=5$

28. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

(가)에서 $a_1=1$, $a_2=2$

(나)에서 $n\geq 3$인 자연수에 대하여

a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지이므로

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=1$, $a_5=0$, $a_6=1$, $a_7=1$, $a_8=2$, $\cdots$

$\sum_{k=1}^{6}a_k=8$, $a_{n+6}=a_n$이므로 $\sum_{k=1}^{6n}a_k=8n$

$n=20$일 때, $\sum_{k=1}^{120}a_k=160$

$a_{121}=a_1=1$, $a_{122}=a_2=2$, $a_{123}=a_3=3$

$\therefore \sum_{k=1}^{m} a_k = 160+1+2+3 = \sum_{k=1}^{120} a_k + a_{121} + a_{122} + a_{123}$

따라서 $m=123$

29. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 5,\ \lim_{x\to 2+0} f(x) = -1$

$-x=t$라 하면

$x\to 2-0$일 때, $t\to -2+0$

$x\to 2+0$일 때, $t\to -2-0$이므로

$\lim_{x\to 2-0} f(-x) = \lim_{t\to -2+0} f(t) = 5$

$\lim_{x\to 2+0} f(-x) = \lim_{t\to -2-0} f(t) = 7$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가

$\lim_{x\to 2-0} f(-x)\{f(x)+k\} = 5(5+k)$,

$\lim_{x\to 2+0} f(-x)\{f(x)+k\} = 7(-1+k)$,

$f(-2)\{f(2)+k\} = 5(5+k)$

이므로 $x=2$에서 연속이 되기 위해서는

$5(5+k) = 7(-1+k)$

따라서 $k=16$

30. [출제의도] 지표와 가수를 활용하여 문제해결하기

정수 $k(k\geq 0)$에 대하여

$10^k \leq x < 10^{k+1}$에서 $\log x$의 지표와 가수는

$f(x)=k,\ g(x)=\log x - k$이므로

$y=\{f(x)+1\}g(x) = (k+1)(\log x - k)$가

$y=n$과 만나는 점의 x좌표는

$(k+1)(\log x - k) = n$

$\log x = k + \frac{n}{k+1}$ (단, $n<k+1$)

$\therefore\ x = 10^{k+\frac{n}{k+1}}$

$n=1$일 때, $x=10^{1+\frac{1}{2}},\ 10^{2+\frac{1}{3}},\ 10^{3+\frac{1}{4}},\ \cdots$

$\therefore\ a_1 = 10^{1+\frac{1}{2}}$

$n=2$일 때, $x=10^{2+\frac{2}{3}},\ 10^{3+\frac{2}{4}},\ 10^{4+\frac{2}{5}},\ \cdots$

$\therefore\ a_2 = 10^{2+\frac{2}{3}}$

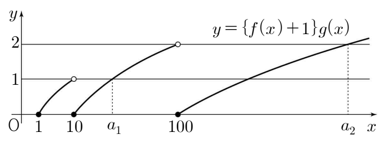
$n=3$일 때, $x=10^{3+\frac{3}{4}},\ 10^{4+\frac{3}{5}},\ 10^{5+\frac{3}{6}},\ \cdots$

$\therefore\ a_3 = 10^{3+\frac{3}{4}}$

$\vdots$

$\therefore\ a_n = 10^{n+\frac{n}{n+1}}$

$$\sum_{n=1}^{10}\left(\log a_n + \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{10}\left(\log 10^{n+\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{10}(n+1) = 65$$



[B 형]

1	④	**2**	③	**3**	②	**4**	④	**5**	①
6	①	**7**	②	**8**	⑤	**9**	⑤	**10**	②
11	④	**12**	③	**13**	②	**14**	①	**15**	③
16	⑤	**17**	③	**18**	③	**19**	④	**20**	④
21	①	**22**	6	**23**	13	**24**	8	**25**	23
26	235	**27**	70	**28**	32	**29**	138	**30**	10

1. [출제의도] 지수의 성질을 알고 계산하기

$4^{\frac{3}{4}} \times 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

2. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

3. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 계산하기

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

4. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

$f(A)+2f(B) = f(A+2B) = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 8\end{pmatrix}$

5. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$\log_3 x = t$라 하면

$\log_9 x = \frac{1}{2}\log_3 x = \frac{1}{2}t$이므로

$t^2+2t-3=0\ \therefore\ t=-3$ 또는 $t=1$

$\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = 1$

$\therefore\ x = \frac{1}{27}$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실근의 곱은 $\frac{1}{9}$

6. [출제의도] 등차수열 이해하기

$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 = 5\times a_6 = 55$

$\therefore\ a_6 = 11$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6 - a_1 = 5d = 10\ \therefore\ d=2$

따라서 $a_{11} = a_1 + 10d = 21$

7. [출제의도] 분수부등식 이해하기

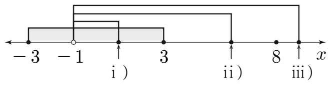
$(x+3)(x-3)(x-8)^2 \leq 0$의 해는

$-3\leq x\leq 3$ 또는 $x=8$ …… ㉠

$\frac{x-k}{x+1}\leq 0$의 해는 $-1<x\leq k$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 주어진 연립부등식의 해는

그림과 같다.



자연수 k의 값의 범위에 따라 정수 x의 개수는 다음과 같다.

ⅰ) $1\leq k<3$일 때

$-1<x\leq k$이므로 $(k+1)$개

ⅱ) $3\leq k<8$일 때

$-1<x\leq 3$이므로 4개

ⅲ) $k\geq 8$일 때

$-1<x\leq 3$ 또는 $x=8$이므로 5개

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 정수 x의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 k는 3, 4, 5, 6, 7

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은 25

8. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{1}{2}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{1}{2}\right) = 0$

$\frac{a_n}{n+1}-\frac{1}{2} = b_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이고

$a_n = (n+1)\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(b_n+\frac{1}{2}\right)}{4+\frac{1}{n}} = \frac{1}{8}$$

9. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$2\cos^2 x - 1 + 6\times\frac{1+\cos x}{2} = 1$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$이므로

$(2\cos x+1)(\cos x+1) = 0$

$\therefore \cos x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = -1$

$\therefore x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\pi$

따라서 모든 실근의 합은 3π

10. [출제의도] 일차변환의 역변환과 합성변환 이해하기

일차변환 f의 역변환 f^{-1}에 의하여

점 $(2,4)$가 점 $(-1,2)$로 옮겨지므로

일차변환 f에 의하여 점 $(-1,2)$는

점 $(2,4)$로 옮겨진다.

$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$

$\therefore a=-2$

합성변환 $f\circ g$에 의하여 점 $(3,2)$가 옮겨지는 점은

$\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}$

따라서 $(-4,6)$

11. [A형 16번과 동일]

12. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim_{x\to +0} f(x) = -2$,

$\lim_{x\to +0} f(-x) = \lim_{x\to -0} f(x) = 2$

$\therefore \lim_{x\to +0}\{f(x)+f(-x)\} = -2+2 = 0$ (참)

ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x\to 1+0$일 때 $t\to -1+0$

$\therefore \lim_{x\to 1+0} f(f(x)) = \lim_{t\to -1+0} f(t) = 0$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0}\{f(x-1)\}^2 = \lim_{x\to +0}\{f(x)\}^2$

$= (-2)^2 = 4$

$\lim_{x\to 1-0}\{f(x-1)\}^2 = \lim_{x\to -0}\{f(x)\}^2$

$= 2^2 = 4$

$\{f(1-1)\}^2 = \{f(0)\}^2 = 2^2 = 4$

$\therefore$ 함수 $\{f(x-1)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

13. [출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$\overline{\mathrm{OP}} = t+\frac{1}{t}$, $\overline{\mathrm{OQ}} = \frac{\sqrt{2}}{2t}$

$f(t) = \overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2t^2}$

$f'(t) = -\frac{\sqrt{2}}{t^3}$이므로

$f'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$

14. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\angle\mathrm{QOP} = \theta$라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2t}\right)^2\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$= \frac{1}{4t^2}\cos\theta$$

직각삼각형 PQO에서

$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2t}}{t+\frac{1}{t}} = \frac{\sqrt{2}}{2(t^2+1)}$이므로

$S(t) = \frac{\sqrt{2}}{8(t^4+t^2)}$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\{t^4\times S(t)\} = \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2}\,t^4}{8(t^4+t^2)}$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{8\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8}$$

15. [A형 19번과 동일]

16. [A형 17번과 동일]

17. [출제의도] 정적분 이해하기

$x^2 = t$라 하면 $2x = \frac{dt}{dx}$이고

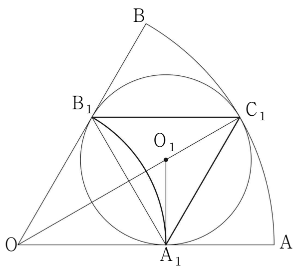
$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$이므로

$$f(n) = \int_1^n \left(x^2e^{x^2}\times x\right)dx = \int_1^{n^2}\frac{1}{2}te^t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[te^t - e^t\right]_1^{n^2} = \frac{1}{2}\left(n^2e^{n^2}-e^{n^2}\right)$$
$$= \frac{e^{n^2}}{2}\left(n^2-1\right)$$

따라서 $\frac{f(5)}{f(3)} = \frac{12\times e^{25}}{4\times e^9} = 3e^{16}$

18. [출제의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

부채꼴 OAB에서 원 O_1의 중심을 O_1이라 하자.



$\overline{\mathrm{OA}_1} = \overline{\mathrm{OB}_1}$이고 $\angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$은 정삼각형이다.

직선 OC_1은 점 O_1을 지나므로

$\angle\mathrm{O}_1\mathrm{OA}_1 = \frac{\pi}{6}$이다.

원 O_1의 반지름의 길이를 a라 하면

$\overline{\mathrm{OA}_1} = \sqrt{3}a$, $\overline{\mathrm{OO}_1} = 2a$, $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1} = a$이므로

$\overline{\mathrm{OC}_1} = 3a = 6$, $a=2$이고

$\overline{\mathrm{OA}_1} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1} = \overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1} = \overline{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1} = 2\sqrt{3}$

이다.

▽모양의 도형 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1$의 넓이는

두 정삼각형 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1$의 넓이의 합에서

부채꼴 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

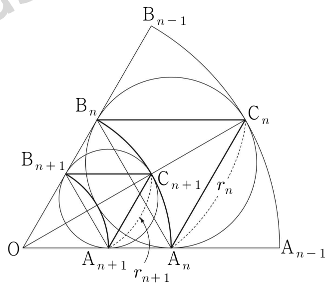
$$\therefore S_1 = 2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}$$
$$= 6\sqrt{3}-2\pi$$

부채꼴 $\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$에 내접하는 원 O_n이

두 선분 OA_{n-1}, OB_{n-1}, 호 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$과

만나는 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자.

(단, $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$, $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}$이다.)



▽모양의 도형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$과

도형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$에서

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} = r_n$, $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = r_{n+1}$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OC}_{n+1}} = \overline{\mathrm{OA}_n} = r_n$이고 $\overline{\mathrm{OA}_{n+1}} = r_{n+1}$이므로

삼각형 $\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$에서

$\angle\mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} = \frac{2}{3}\pi$이므로

코사인법칙에 의하여

$${r_n}^2 = {r_{n+1}}^2 + {r_{n+1}}^2 - 2{r_{n+1}}^2\cos\frac{2}{3}\pi$$
$${r_n}^2 = 3{r_{n+1}}^2$$
$$r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}r_n$$

두 도형의 닮음비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$이다.

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6\sqrt{3}-2\pi$이고

공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n = \frac{6\sqrt{3}-2\pi}{1-\frac{1}{3}} = 9\sqrt{3}-3\pi$

19. [출제의도] 분수방정식을 활용하여 추론하기

$$\frac{f(x)-2}{g(x)-2} - \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$
$$\frac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2-2\{f(x)-g(x)\}}{f(x)\{g(x)-2\}} = 0$$
$$\frac{\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)-2\}}{f(x)\{g(x)-2\}} = 0$$

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)-2\} = 0$이고

$f(x)\{g(x)-2\}\neq 0$이다.

ⅰ) $f(x) = g(x)$일 때

$x=-1$ 또는 $x=2$

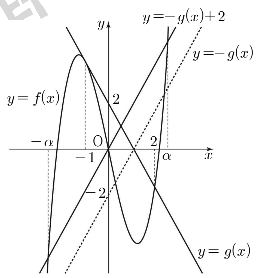
$f(-1)\neq 0$이고 $g(-1)-2>0$

$f(2)\neq 0$이고 $g(2)-2<0$

$\therefore$ $x=-1$과 $x=2$는 무연근이 아니므로

서로 다른 실근의 개수는 2

ⅱ) $f(x) = -g(x)+2$일 때



$y=-g(x)+2$의 그래프는 $y=g(x)$의 그래프를

x축에 대하여 대칭이동시킨 후, y축의 방향으로

2만큼 평행이동시켜 얻은 그래프이다.

$y=f(x)$의 그래프와 $y=-g(x)+2$의 그래프의

세 교점의 x좌표는 $-\alpha$, 0, $\alpha\ (\alpha>0)$이다.

$f(-\alpha)<0$이고 $g(-\alpha)-2>0$

$f(\alpha)>0$이고 $g(\alpha)-2<0$

$f(0)=0$이므로

$x=-\alpha$, $x=\alpha$는 무연근이 아니고,

$x=0$은 무연근이다.

$\therefore$ 서로 다른 실근의 개수는 2

ⅰ), ⅱ)에서 서로 다른 실근의 개수는 4

20. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$

직선 $y=x$가 x축과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$

$\angle\mathrm{POQ} = \theta-\frac{\pi}{4}$이므로

직각삼각형 OQP에서

$\overline{\mathrm{OQ}} = \cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\overline{\mathrm{OQ}}\cos\frac{\pi}{4}, \overline{\mathrm{OQ}}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}, \cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right)$이므로

점 M의 y좌표는

$\frac{1}{2}\left\{\sin\theta+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\sin\theta + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\sin(\theta+\alpha)=1$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{2}-\alpha$일 때

점 M의 y좌표는 최댓값을 갖는다.

따라서 $\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=3$

21. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$x \geq 0$일 때

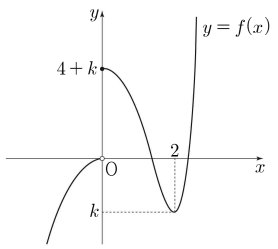
$f'(x)=x(x-2)e^x\ (x>0)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$f(0)=4+k$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4+k$	↘	k	↗

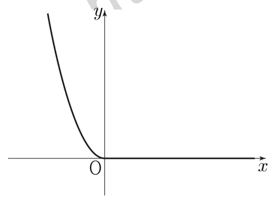
$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(x)=\begin{cases} 0 & (f(x)\geq 0) \\ -2f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$이므로

k의 값의 범위에 따라 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

ⅰ) $k \geq 0$일 때



$x=0$에서 연속이고,

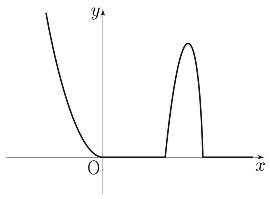
$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{2x^2}{x}=0$

$\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{0}{x}=0$이므로

$x=0$에서 미분가능하다.

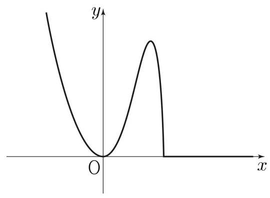
$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 0

ⅱ) $-4<k<0$일 때



$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 2

ⅲ) $k=-4$일 때



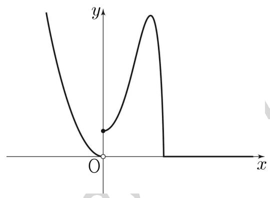
$x=0$에서 연속이고

$\lim_{x\to -0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

$\therefore$ 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

ⅳ) $k<-4$일 때



$\therefore x=0$에서는 불연속이고,

연속이면서 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

ⅰ)~ⅳ)에 의하여 $-4<k<0$이고

정수 k의 개수는 3

22. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기

$\begin{pmatrix} k-1 & -1 \\ 2 & k-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix} k-1 & -1 \\ 2 & k-4 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$\therefore (k-1)(k-4)+2=0$

$k^2-5k+6=0$, $k=2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 6

23. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$f'(x)=3(x+1)^2+\frac{1}{x}$

따라서 $f'(1)=13$

24. [출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to 0}x^2f(x)=\lim_{x\to 0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\frac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\times 4\times\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\right\}$

$=1\times 1\times 4\times 2=8$

25. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\begin{cases} 2x^{\frac{3}{2}}+C_1 & (x>1) \\ x^2+C_2 & (x<1) \end{cases}$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(4)=16+C_1=13$

$C_1=-3$

$x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-0}(x^2+C_2)=\lim_{x\to 1+0}\left(2x^{\frac{3}{2}}-3\right)$

$1+C_2=-1$

$C_2=-2$

따라서 $f(-5)=25-2=23$

26. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 추론하기

$a_1=3$

$a_2=\frac{3+93}{2}=48$

$a_3=\frac{48}{2}=24$

$a_4=\frac{24}{2}=12$

$a_5=\frac{12}{2}=6$

$a_6=\frac{6}{2}=3$

$\vdots$

$a_k=3$을 만족시키는 50이하의 모든 자연수 k는

1, 6, 11, 16, $\cdots$, 46

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$\sum_{m=1}^{10}(5m-4)=5\times\frac{10\times(10+1)}{2}-4\times 10$

$=235$

27. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\{f(x)\}^2+3g(x)=3$에서

$g(x)=\frac{3-\{f(x)\}^2}{3}$이고 $0\leq g(x)<1$이므로

$0\leq\frac{3-\{f(x)\}^2}{3}<1$

$0<\{f(x)\}^2\leq 3$

$\therefore f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$

ⅰ) $f(x)=1$일 때

$g(x)=\frac{2}{3}$이므로 $\log x=\frac{5}{3}$ $\therefore x=10^{\frac{5}{3}}$

ⅱ) $f(x)=-1$일 때

$g(x)=\frac{2}{3}$이므로 $\log x=-\frac{1}{3}$ $\therefore x=10^{-\frac{1}{3}}$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $x=10^{\frac{5}{3}}$ 또는 $x=10^{-\frac{1}{3}}$

모든 x의 값의 곱은 $10^{\frac{4}{3}}$

따라서 $p=3$, $q=4$이고 $10(p+q)=70$

28. **[출제의도] 무한급수와 정적분을 활용하여 문제해결하기**

삼각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{B}$에서

$\angle \mathrm{OBQ}_k = \angle \mathrm{AOP}_k = \dfrac{k\pi}{2n}$이고 $\overline{\mathrm{OB}} = 8$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_k} = 8\sin\dfrac{k\pi}{2n}$, $\overline{\mathrm{BQ}_k} = 8\cos\dfrac{k\pi}{2n}$

$S_k = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OQ}_k} \times \overline{\mathrm{BQ}_k}$

$= \dfrac{1}{2} \times 8\sin\dfrac{k\pi}{2n} \times 8\cos\dfrac{k\pi}{2n} = 16\sin\dfrac{k\pi}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k = 16\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$

$\displaystyle= 16\int_0^1 \sin\pi x\, dx = 16\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 = \frac{32}{\pi}$

따라서 $\alpha = 32$

29. **[출제의도] 일차변환을 활용하여 문제해결하기**

주어진 일차변환은 원점을 중심으로 $\dfrac{n\pi}{24}$만큼 회전하는 회전변환이다.

세 직선 OA, OB, OC가 x축과 이루는 각의 크기는

각각 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$, α $\left(\text{단, } \dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}\right)$이므로

직선 OA가 직선 $y = -\sqrt{3}x$와 이루는

각의 크기는 $\dfrac{5\pi}{12}$ 또는 $\dfrac{17\pi}{12}$이고,

직선 OB가 직선 $y = -\sqrt{3}x$와 이루는

각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{3\pi}{2}$이다.

삼각형 $\mathrm{A'B'C'}$과 직선 $y = -\sqrt{3}x$가 만나도록 하려면

i) $\dfrac{5\pi}{12} \le \dfrac{n\pi}{24} \le \dfrac{\pi}{2}$이므로

$10 \le n \le 12 \quad \therefore n = 10,\ 11,\ 12$

ii) $\dfrac{17\pi}{12} \le \dfrac{n\pi}{24} \le \dfrac{3\pi}{2}$이므로

$34 \le n \le 36 \quad \therefore n = 34,\ 35,\ 36$

i), ii)에 의하여 모든 자연수 n의 값의 합은 138

30. **[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기**

t초가 되는 순간 점 P의 좌표는 $(2t,\ 0)$

$\angle \mathrm{QOP} = \theta$라 하면, $\angle \mathrm{AOQ} = \dfrac{\pi}{3} - \theta$

부채꼴 OQA의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 10^2 \times \left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right) = 50\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right)$

삼각형 OPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 10 \times 2t \times \sin\theta = 10t\sin\theta$

$S = 50\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right) + 10t\sin\theta$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dS}{dt} = -50\dfrac{d\theta}{dt} + 10\sin\theta + 10t\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} \cdots\cdots$ ㉠

점 $\mathrm{P}(2t,\ 0)$을 지나고 직선 $y = \sqrt{3}x$에 평행한 직선을 l이라 하면

직선 l의 방정식은 $y = \sqrt{3}(x - 2t)$이고

직선 l과 원이 만나는 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$이므로 직선 l에 대입하면

$10\sin\theta = \sqrt{3}(10\cos\theta - 2t) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면

$10\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}\left(-10\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} - 2\right) \cdots\cdots$ ㉢

점 Q의 y좌표가 5이므로

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고

㉡에서 $t = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$이고

㉢에서 $\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{5}$이다.

㉠에 의하여 $\dfrac{dS}{dt} = 10$