2016학년도 대학수학능력시험 대비

2015학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학'A'형 정답

1	③	2	④	3	①	4	⑤	5	⑤
6	①	7	①	8	⑤	9	②	10	④
11	②	12	③	13	③	14	⑤	15	④
16	③	17	②	18	④	19	③	20	①
21	②	22	64	23	200	24	8	25	137
26	18	27	17	28	43	29	9	30	44

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$\sqrt{2}\times 8^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=4$

2. [출제의도] 행렬의 연산법칙을 이용하여 두 행렬의 곱을 계산한다.

$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$이므로 행렬 AB의 모든 성분의 합은 $2+1+4+3=10$

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=0$$

4. [출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해하여 성분의 값을 구한다.

각 점에 연결된 변의 개수가 1인 점이 6개, 2인 점이 6개, 3인 점이 5개, 5인 점이 1개

따라서 행의 모든 성분의 합이 3인 행의 개수는 5

5. [출제의도] 등비수열의 성질을 이해하고 일반항을 구한다.

$a_2=2$, $a_3=4$이므로 공비는 2 $\therefore a_5=16$

6. [출제의도] 조건부 확률의 성질을 이해하고 주어진 값을 구한다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$

7. [출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 미정계수를 구한다.

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(1)=2+a$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}(2+a)$$

따라서 $\frac{1}{2}(2+a)=6$에서 $a=10$

8. [출제의도] 확률분포를 이해하고 기댓값을 구한다.

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=k(1+2+3)=6k=1$ $\therefore k=\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X)=k+4k+9k=14k=\frac{14}{6}$

$\mathrm{E}(6X+1)=6\mathrm{E}(X)+1=6\times\frac{14}{6}+1=15$

9. [출제의도] 함수의 극한을 이해하고 조건을 만족하는 값을 구한다.

$\lim_{x\to -1-0}f(x)+\lim_{x\to 1+0}f(x)=2+0=2$

10. [출제의도] 적분의 성질을 이해하고 넓이를 구한다.

$x^3-2x^2+k=k$에서 $x^3-2x^2=0$, $x=0$ 또는 2

따라서 $\int_0^2\left|x^3-2x^2+k-k\right|dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}$

11. [출제의도] 정규분포를 활용하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

임의로 추출된 야구공 9개 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(144.9,\ 2^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(141.7\le\overline{X}\le 148.9)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{141.7-144.9}{2}\le Z\le\frac{148.9-144.9}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.9224$

12. [출제의도] 함수의 연속의 성질을 이해하여 주어진 조건의 값을 구한다.

함수 $f(t)=\begin{cases}2 & (|t|>1)\\ 1 & (|t|=1)\\ 0 & (|t|<1)\end{cases}$이고 함수 $(x+k)f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이다.

$(1+k)f(1)=\lim_{x\to 1-0}(x+k)f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x+k)f(x)$

$1+k=(1+k)\times 0=(1+k)\times 2$

따라서 $k=-1$이므로 $f(1)+k=1-1=0$

13. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계를 이해하여 주어진 조건의 값을 구한다.

$\begin{pmatrix}f(k)+1 & k\\ k^2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로 $f(k)+1-k^3=0$

$k^3+6k^2+8k+1-k^3=6k^2+8k+1=0$

따라서 k의 값의 합은 $-\frac{4}{3}$

14. [출제의도] 적분과 미분의 관계를 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

$g'(x)=f(x)=0$을 만족하는 x를 구하면

$x(x+2)(x+4)=0$에서 $x=-4$, -2, 0이므로

$x=-2$에서 $g(x)$는 극댓값을 갖는다. $\therefore\alpha=-2$

$g(\alpha)=\int_2^{-2}f(t)dt=\int_2^{-2}(t^3+6t^2+8t)\,dt$

$=-2\int_0^2 6t^2dt=-2\left[2t^3\right]_0^2=-32$

15. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 관련된 외적 문제를 해결한다.

30분 후 농도가 2 ng/mL이므로

$\log(10-2)=1-30k$, $k=\frac{1}{30}\log\left(\frac{5}{4}\right)$

60분 후 농도가 a이므로 $\log(10-a)=1-60k$

$\log(10-a)=1-2\log\left(\frac{5}{4}\right)=\log\left(\frac{32}{5}\right)$

따라서 $a=\frac{18}{5}=3.6$

16. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론한다.

$n=2m-1$을 대입하면 $\frac{a_{2m+1}}{a_{2m-1}}=\frac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$

그러므로 (가)는 $\frac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$

$m-1$개의 식을 곱하여 정리하면

$$\frac{a_{2m+1}}{a_1}=\frac{1^2\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times(2m-1)^2}{2\times 3\times 4\times 5\times\cdots\times(2m+1)}$$

$$a_{2m+1}=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2m-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2m}\times\frac{1}{2m+1}$$

그러므로 (나)는 $\frac{1}{2m+1}$

따라서 $f(5)\times g(4)=\frac{9}{110}$

17. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 x좌표를 추론한다.

$\mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(2^a,\ a)$이고 $\mathrm{C}(\log_2 a,\ a)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=12\sqrt{2}$, $2(2^a-a)^2=288$, $2^a-a=12$ ⋯ ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=2^a-a=12$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=14$이다.

그러므로 $2^a-\log_2 a=14$ ⋯ ㉡

㉡-㉠으로부터 $a-\log_2 a=2$

18. [출제의도] 수열의 정의를 이용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

$a_m=1$이므로 $m=2^1\times q$ (q는 홀수)

$2m=2^2\times q$이므로 $a_{2m}=2$

⋮

따라서 $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{10m}$

$=1+2+1+3+1+2+1+4+1+2=18$

19. [출제의도] 주어진 조건을 이용하여 행렬의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. $B=2E-A$에서 $AB=A(2E-A)=2A-A^2$

$BA=(2E-A)A=2A-A^2$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $A=2E-B$를 $B^2+2AB+5A=4E$에 대입하여 정리하면 $B^2+B=6E$

$\therefore B^{-1}=\frac{1}{6}(B+E)$ (참)

ㄷ. $BA^2+AB^2=AB(A+B)=2AB$

$2AB=-B^2-5A+4E$

$=-6E+B-5(2E-B)+4E=6B-12E$

B는 역행렬이 존재하므로 영행렬이 아니다.

$\therefore 2AB\neq -12E$ (거짓)

20. [출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.

점 A_2를 지나고 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$에 평행한 직선과 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$, 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$의 교점을 각각 P, Q라 하자.

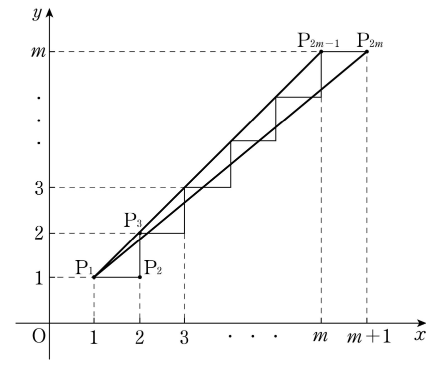
두 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$, $\mathrm{A}_1\mathrm{PQ}$의 닮음비는 $3:2$, 두 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{PQ}$, $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$의 닮음비는 $2:1$이므로 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$과 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$의 닮음비는 $3:1$

그러므로 과 의 넓이의 비는 $9:1$

$$S_1=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi\quad\therefore\ \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$$

21. [출제의도] 주어진 조건을 이용하여 수열의 극한을 구하는 문제를 해결한다.



$a_3=\sqrt{1^2+1^2}$, $a_4=\sqrt{2^2+1^2}$, $a_5=\sqrt{2^2+2^2}$, $\cdots$, $a_{2m-1}=\sqrt{(m-1)^2+(m-1)^2}$,

$a_{2m}=\sqrt{m^2+(m-1)^2}$

i) $n=2m-1$ (m 은 자연수)일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim\limits_{m\to\infty}(a_{2m}-a_{2m-1})$

$=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2-2m+1}-\sqrt{2(m-1)^2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ii) $n=2m$ (m 은 자연수)일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim\limits_{m\to\infty}(a_{2m+1}-a_{2m})$

$=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2}-\sqrt{2m^2-2m+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 i), ii)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

22. [출제의도] 함수의 극한값을 계산한다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+7)^2(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+7)^2=64$

23. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$\int_0^{10}(x+1)^2dx-\int_0^{10}(x-1)^2dx=\int_0^{10}4x\,dx=200$

24. [출제의도] 조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

A가 세 개의 공을 받으므로 남는 공의 수는 7이다. 7개의 공을 두 사람에게 나누어 주는 경우의 수이므로 ${}_{2+7-1}\mathrm{C}_7={}_8\mathrm{C}_7=8$

25. [출제의도] 수열의 성질을 이해하여 값을 구한다.

$a_3=\dfrac{a_2+a_4}{2}=27$, $a_{13}=\dfrac{a_{12}+a_{14}}{2}=127$

공차를 d라 하면 $a_{13}=a_3+(11-1)d$에서 $d=10$

따라서 $a_{14}=a_{13}+d=137$

26. [출제의도] 이항분포를 이해하여 n을 구한다.

$\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=18$에서 $\mathrm{E}(X)=np=6$ ⋯ ㉠

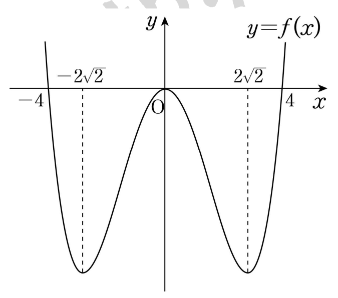
$\mathrm{E}(3X^2)=3\mathrm{E}(X^2)=120$이므로 $\mathrm{E}(X^2)=40$

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$6(1-p)=40-6^2=4$이므로 $p=\dfrac{1}{3}$

따라서 ㉠에 대입하면 $n=18$

27. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.



$f'(x)=4x(x^2-8)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$, 0, $2\sqrt{2}$

(가)의 조건에 의해 $f(x)$는 구간 $(k,\ k+1)$에서 감소한다.

그래프에서 감소하는 구간은 $(-\infty,\ -2\sqrt{2})$, $(0,\ 2\sqrt{2})$이고, k는 정수이므로 $k=0$, 1 또는 -4, -5, ⋯

(나)의 조건에 의해 $f'(k+2)>0$이므로

$k=1$ 또는 -4

따라서 $1^2+(-4)^2=17$

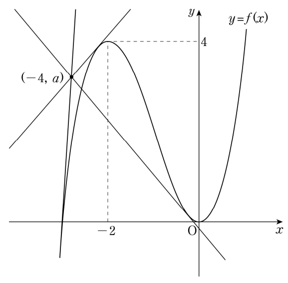
28. [출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 주어진 규칙에 따라 문제를 해결한다.

$a=6$이고 $0\le b\le 6$이므로 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우는 $b=0$, 3, 6

${}_6\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+{}_6\mathrm{C}_6\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

$=\dfrac{1}{64}+\dfrac{20}{64}+\dfrac{1}{64}=\dfrac{11}{32}$ $\therefore p+q=43$

29. [출제의도] 세 개의 접선이 존재할 수 있는 점의 범위를 찾는 문제를 해결한다.



함수 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 4, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다. 세 접선의 기울기의 곱이 음수이므로 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 세 접선의 기울기 중 한 접선의 기울기만 음수이다.

$0<a<4$이므로 정수 a의 최댓값 M은 3이다.

따라서 $M^2=9$

30. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.

$(n+1)\log a=3n^2-4n+4$이므로

$\log a=3n-7+\dfrac{11}{n+1}$ ⋯ ㉠

(가)에서 $2n\log a-\log a=(2n-1)\log a=$(정수)이므로 ㉠의 양변에 $(2n-1)$을 곱하면

$(2n-1)\log a=(2n-1)(3n-7)+\dfrac{11(2n-1)}{n+1}$

$=(2n-1)(3n-7)+22-\dfrac{33}{n+1}$

$\dfrac{33}{n+1}$이 정수이고 n은 자연수이므로 $n+1$은 3, 11, 33

따라서 n의 값의 합은 $2+10+32=44$

수학'B'형 정답

1	⑤	2	②	3	①	4	③	5	⑤
6	⑤	7	④	8	④	9	②	10	④
11	①	12	④	13	⑤	14	②	15	③
16	③	17	①	18	②	19	①	20	③
21	⑤	22	9	23	14	24	11	25	64
26	16	27	6	28	26	29	32	30	134

해 설

1. [출제의도] 행렬의 합을 계산한다.

$A+E=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 5

2. [출제의도] 지수함수의 극한값을 계산한다.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$

3. [출제의도] 삼각함수의 값을 계산한다.

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

4. [출제의도] 적분의 성질을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos x\,dx=3\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=3$

5. [출제의도] 벡터의 성질을 이해하여 크기를 구한다.

$\vec{a}+\vec{b}=(2,3)+(1,1)=(3,4)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

6. [출제의도] 무리방정식의 성질을 이해하여 실근을 구한다.

$\sqrt{x^2-3x+6}=X$로 치환하면

주어진 식은 $X^2-6=X$

$(X-3)(X+2)=0$에서 $X\ge0$이므로

$\sqrt{x^2-3x+6}=3$, $x^2-3x-3=0$

따라서 모든 실근의 곱은 -3

7. [출제의도] 조건부 확률을 이해하여 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{7}{12}$

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{4}{7}$

8. [출제의도] 일차변환의 성질을 이해하여 옮겨지는 점의 좌표를 구한다.

일차변환 f를 나타내는 행렬을 M이라 하면

$M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$이므로

$M\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=2M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+5M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$

따라서 $a+b=18$

9. [출제의도] 무한급수의 수렴과 수열의 극한값 사이의 관계를 이해하여 극한값을 구한다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{2n}{n+3}\right)=5$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{2n}{n+3}\right)=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+3}=2$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a_n-2n}{a_n+2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5a_n}{n}-2}{\dfrac{a_n}{n}+2+\dfrac{1}{n}}=2$

10. 'A'형 15번과 동일

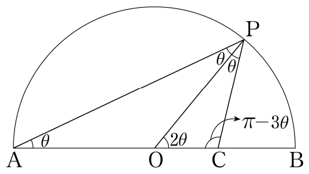
11. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 표본의 크기를 추측한다.

신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[0.2-1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}},\ 0.2+1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}\right]$

$2\times1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}=0.112$이므로 $n=196$

12. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.



삼각형 POC에서 사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}$이므로

$\lim\limits_{\theta\to+0}\overline{\mathrm{OC}}=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\times\dfrac{3\theta}{\sin3\theta}\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

13. [출제의도] 직각이등변삼각형을 이용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 4인 등차수열이므로 $\sum\limits_{n=1}^{5}a_n=\dfrac{5(2\times4+4\times4)}{2}=60$

14. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 삼각형 FPQ의 둘레의 길이가 $12\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{PF}}=(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'})+(\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF}'})$

$=4a=12\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF}'}=a=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{F'Q}}=k$라 하면 삼각형 FPQ는 직각삼각형이므로

$(k+3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=(6\sqrt{2}-k)^2$에서 $k=\sqrt{2}$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=12$

15. ‘A’형 16번과 동일

16. ‘A’형 19번과 동일

17. ‘A’형 20번과 동일

18. **[출제의도] 중복조합의 성질을 이해하여 경우의 수를 구한다.**

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 $x,\ y,\ z,\ w$라 하면 $x+y+z+w=14$

$x,\ y,\ z,\ w$가 모두 홀수이므로

$x=2a+1,\ y=2b+1,\ z=2c+1,\ w=2d+1$

(단, $a,\ b,\ c,\ d$는 0 이상 4 이하의 정수)

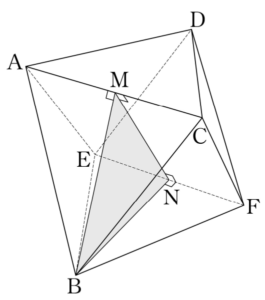
$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14$

$a+b+c+d=5$

$a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 중복을 허락하여 5개를 택한다. 이때 $a,\ b,\ c,\ d$는 4 이하의 정수이므로 한 가지만 5번 택하는 4가지 경우는 제외한다.

${}_4\mathrm{H}_5-4={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5-4={}_8\mathrm{C}_5-4=\frac{8!}{5!3!}-4=52$

19. **[출제의도] 정사영의 성질을 이해하여 넓이를 구한다.**



선분 AC와 EF의 중점을 각각 M, N이라 하면

사각형 AEFC가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{MN}}=2$

$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{BN}}=\sqrt{3}$

$\cos(\angle\mathrm{MBN})=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$ 이므로

$S_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

두 평면 BEF와 CBF가 이루는 각의 크기는 두 평면 ACD와 ABC가 이루는 각의 크기와 같다.

평면 BEF와 평면 ACD가 평행하므로

$S_2=S_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\therefore S_1+S_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

20. **[출제의도] 실생활과 관련하여 조건부 확률을 구하는 문제를 해결한다.**

학생 A와 B가 서로 다른 구역의 좌석을 배정받는 사건을 T, 학생 C와 D가 같은 구역에 같은 열의 좌석을 배정받는 사건을 U라 하자.

$\mathrm{P}(T)=\frac{2\times(2\times3\times3!)}{5!}=\frac{3}{5}$

두 학생 A, B가 서로 다른 구역에 배정받을 때, 두 학생 C, D가 (나) 구역의 2열에 배정받아야 하므로

$\mathrm{P}(U\cap T)=\frac{2\times(2\times1\times2!)}{5!}=\frac{1}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(U|T)=\frac{\mathrm{P}(U\cap T)}{\mathrm{P}(T)}=\frac{1}{9}$

21. **[출제의도] 적분법을 이용하여 방정식의 근의 개수를 구하는 문제를 해결한다.**

함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 실수 t와 정수 k에 대하여

$\int_t^{t+2k}f(x)dx=0,\ \int_{-t}^{t+2k}f(x)dx=0$

따라서 구간 $[-1,1]$에서 방정식 $h(x)=0$

즉 $\int_{g(x)}^{g(x+1)}f(t)dt=0$을 만족시키려면

$g(x+1)-g(x)=2n$ (n은 정수)

또는 $g(x+1)+g(x)=2m$ (m은 정수)이어야 한다.

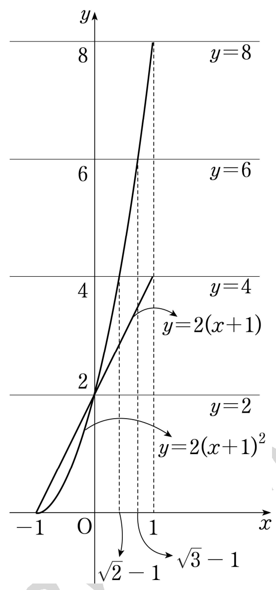
$g(x)=x(x+1)$이므로 $g(x+1)-g(x)=2(x+1)$

$g(x+1)+g(x)=2(x+1)^2$

구간 $[-1,1]$에서 두 함수 $y=2(x+1)$, $y=2(x+1)^2$의 그래프는 그림과 같으므로

$2(x+1)=2n$ (n은 정수)를 만족시키는 x의 값은 $-1,\ 0,\ 1$이고, $2(x+1)^2=2m$ (m은 정수)를 만족시키는 x의 값은 $-1,\ 0,\ \sqrt{2}-1,\ \sqrt{3}-1,\ 1$이다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 5



22. **[출제의도] 지수와 로그의 값을 계산한다.**

$9^{\frac{1}{2}}\times\log_2 8=(3^2)^{\frac{1}{2}}\times\log_2 2^3=3\times3=9$

23. **[출제의도] 미분계수의 값을 계산한다.**

$f'(x)=14xe^{x^2-1}$이므로 $f'(1)=14$

24. **[출제의도] 분수부등식을 이해하여 부등식을 만족시키는 정수해의 개수를 구한다.**

$\frac{1}{x-10}\le\frac{1}{x+2}$에서 $\frac{12}{(x-10)(x+2)}\le 0$

$12(x-10)(x+2)\le 0,\ x\ne-2,\ x\ne 10$

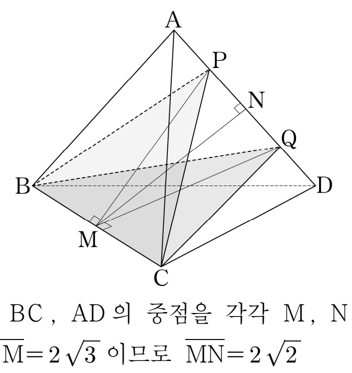
따라서 $-2<x<10$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 11

25. **[출제의도] 포물선의 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.**

기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+8$이므로

구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times16\times8=64$

26. **[출제의도] 이면각의 정의를 이해하여 이면각의 크기를 구한다.**



두 선분 BC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하면,

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{DM}}=2\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{MN}}=2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PN}}=\overline{\mathrm{QN}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{QM}}=3$

$\theta=\angle\mathrm{PMQ}$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=2$이므로

$\cos\theta=\frac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\frac{7}{9}$, 따라서 $p+q=16$

27. **[출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.**

$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx=-4$에서 $x+1=t$로 놓으면

$\frac{dx}{dt}=1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$

$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx$

$=\int_1^2(t-2)f'(t)dt=\Big[(t-2)f(t)\Big]_1^2-\int_1^2f(t)dt$

$=f(1)-\int_1^2f(t)dt=2-\int_1^2f(t)dt=-4$

따라서 $\int_1^2f(x)dx=6$

28. **[출제의도] 표본평균의 확률분포를 이해하여 기댓값을 구한다.**

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{49}$에서 $n=6$

$\mathrm{E}(\overline{X})$는 모평균과 같으므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1+3n}{7}=\frac{19}{7}$이므로 $p+q=26$

29. **[출제의도] 정삼각형의 성질과 미분법을 이용하여 접점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.**

직선 l의 기울기가 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, 세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형이므로 두 접선 m, n과 직선 l이 이루는 예각의 크기는 $60°$이다.

직선 l과 이루는 예각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기를 k라 하면 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-k}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}k}\right|=\sqrt{3}$, $k=\frac{\sqrt{3}}{5}$ 또는 $k=3\sqrt{3}$

$f(x)=\sqrt{3}\ln x$에서 $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{x}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{\beta}=3\sqrt{3}$

$\alpha=5,\ \beta=\frac{1}{3}$이므로 $6(\alpha+\beta)=32$

30. **[출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.**

원 C의 중심을 O′이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\bullet(\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'B}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{O'B}}$

평면 $x-y+z-6=0$을 α라 하면 구의 중심과 점 O′을 지나는 직선 위의 점의 좌표가 $(t,\ -t,\ t+3)$이고 점 O′이 평면 α 위의 점이므로

$\mathrm{O'}(1,\ -1,\ 4)$이다. 따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=12$

구 S의 중심에서 평면 α까지의 거리 $\sqrt{3}$, 구의 반지름의 길이 2에서 원 C의 반지름의 길이는 1 평면 α와 직선 OA가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{(1,-1,1)\bullet(\sqrt{2},\sqrt{2},3)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{2+2+9}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{O'B}}=1$이고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{O'B}}$가 이루는 각의 크기를 β라 하면 $\theta\le\beta\le\pi-\theta$이므로

$\cos(\pi-\theta)\le\cos\beta\le\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{O'B}}=1$이고

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{O'B}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{O'B}}|\cos\beta$이므로

$-\sqrt{10}\le\overrightarrow{\mathrm{OA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{O'B}}\le\sqrt{10}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 최댓값은 $12+\sqrt{10}$, 최솟값은 $12-\sqrt{10}$이므로 곱은 134