

1. 음함수의 미분법을 이용하면

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} \frac{dy}{dx} = 0$$

이다. 즉,  $y \neq 0$  일 때

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{4y}$$

를 얻는다. 따라서  $(-1, \frac{3}{2})$ 를 지나는 접선의 기울기는  $\frac{1}{2}$  이다.

2. 포물선  $x = y^2$  위의 점을  $(a, b)$ 라고 하자. 그러면  $a = b^2$ 이 성립한다. 원점이 아닌 점에서의 포물선에 접하는 접선의 기울기를 구하면  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$  이므로 원점이 아닌 점  $(a, b)$ 를 지나고 포물선  $x = y^2$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2b}(x - a) + b$$

가 된다. 평면위의 점  $(-3, 1)$ 이 이 직선위에 있다고 하면  $1 = \frac{1}{2b}(-3 - a) + b$ , 즉,  $2b = -3 - a + 2b^2$ 을 만족하는데, 앞서 포물선 위의 점은  $a = b^2$  을 만족하므로,  $2b = -3 - b^2 + 2b^2$  이 성립한다. 따라서  $b^2 - 2b - 3 = 0$ 을 풀면  $b = 3$  또는  $b = -1$  을 만족하고, 이에 대응하는  $a$ 는  $a = 9$  또는  $a = 1$  이다. 따라서 포물선  $x = y^2$  에 접하고 점  $(-3, 1)$ 을 지나 는 직선은

$$\text{점 } (9, 3) \text{에서 접하는 } y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2} \text{ 과}$$

$$\text{점 } (1, -1) \text{에서 접하는 } y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

두 직선이  $x$ 축과 이루는 각을 각각  $\alpha$ 와  $\beta$ 라고 하자. (단,  $0 < \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ 로 잡는다.) 이 때,  $\tan \alpha = \frac{1}{6}$ ,  $\tan \beta = \frac{1}{2}$  이다. 이를 이용하면  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{37}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$ ,  $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$  를 얻을 수 있고,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{12}{\sqrt{185}} - \frac{1}{\sqrt{185}} = \frac{11}{\sqrt{185}} \text{ 를 얻는다.}$$

이 때  $\cos(\alpha + \beta)$  가 양수이므로  $0 \leq \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$ 을 확인할 수 있다. 따라서  $\theta = \alpha + \beta$  가 되고,  $\cos \theta = \frac{11}{\sqrt{185}}$  이다.

3. 초점  $C(1, 0)$ 을 지나고 기울기가  $m$ 인 직선은  $y = m(x - 1)$  이다. 삼각형의 넓이를 구하기 위해서는 점  $A$ 와 점  $B$ 의  $y$ 좌표값을 알아야 한다.  $x = \frac{y}{m} + 1$ 을 타원의 방정식에 대입하면  $\frac{1}{4}\left(\frac{y}{m} + 1\right)^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 이 되고, 정리하면  $\left(\frac{1}{m^2} + \frac{4}{3}\right)y^2 + \frac{2}{m}y - 3 = 0$  이 된다. 따라서

$$y_1 = \frac{-\frac{1}{m} - \sqrt{\frac{1}{m^2} + 3\left(\frac{1}{m^2} + \frac{4}{3}\right)}}{\frac{1}{m^2} + \frac{4}{3}} = -\frac{3m(1 + 2\sqrt{m^2 + 1})}{4m^2 + 3},$$

$$y_2 = \frac{-\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m^2} + 3\left(\frac{1}{m^2} + \frac{4}{3}\right)}}{\frac{1}{m^2} + \frac{4}{3}} = \frac{3m(-1 + 2\sqrt{m^2 + 1})}{4m^2 + 3}$$

를 얻을 수 있다. 삼각형의 넓이는  $S_1 = -\frac{3}{2}y_1$  ,  $S_2 = \frac{1}{2}y_2$  이므로,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{3}{2} \frac{3m(1 + 2\sqrt{m^2 + 1})}{4m^2 + 3}}{\frac{1}{2} \frac{3m(-1 + 2\sqrt{m^2 + 1})}{4m^2 + 3}} = \frac{3(1 + 2\sqrt{m^2 + 1})}{-1 + 2\sqrt{m^2 + 1}} \text{ 이다.}$$

따라서  $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{S_1}{S_2} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{3(1 + 2\sqrt{m^2 + 1})}{-1 + 2\sqrt{m^2 + 1}} = 9$  를 얻는다.

1. 거리가 최소가 되기 위한 필요조건은 점 A와 점  $(x_0, y_0)$ 를 연결하는 직선이  $(x_0, y_0)$ 에서의 접선에 수직이 되는 것이다. 접선의 기울기는  $-\frac{2x}{y}$  이므로,

$$\frac{y_0 - b}{x_0 - a} = \frac{y_0}{2x_0}, \text{ 즉, } y_0 = \frac{2bx_0}{x_0 + a} \text{ 가 되고 이를 } 2x^2 + y^2 = 1 \text{ 에 대입하면,}$$

$$2x^4 + 4ax^3 + (2a^2 + 4b^2 - 1)x^2 - 2ax - a^2 = 0$$

따라서 답은  $2a^2 + 4b^2 - 1$ .

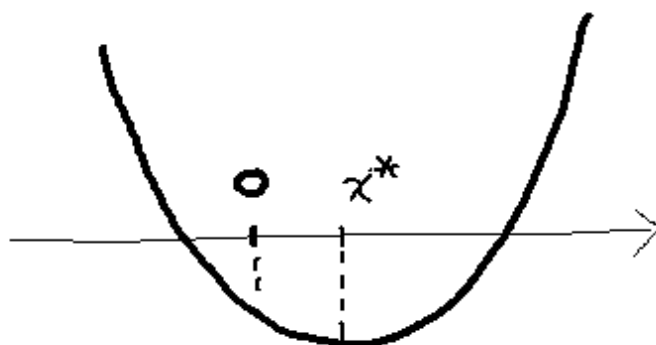
2.  $f'(x) = 8x^3 + 12ax^2 + 2(2a^2 + 4b^2 - 1)x - 2a$ ,  $f''(x) = 24x^2 + 24ax + 2(2a^2 + 4b^2 - 1)$  인데,

$f''(x)$ 의 판별식은  $D = -192(-a^2 + 4b^2 - 1)$  이다.

$$a < \frac{3}{2}b \text{로부터 } -a^2 + 4b^2 - 1 > -\frac{9}{4}b^2 + 4b^2 - 1 = \frac{7}{4}b^2 - 1 > 0 \text{ 이므로 } D < 0 \text{ 이 되어 } f''(x) > 0 \text{ 이다.}$$

따라서  $f'(x)$ 는 증가함수이며 실근을 오직 하나만 가지며 이 실근은 양수이다. ( $f'(0) = -2a < 0$  이므로)

이 실근을  $x^*$ 라 하면  $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 개형을 가진다.



3.  $y_0 = \frac{2bx_0}{x_0 + a}$  를  $2x^2 + y^2 = 1$  에 대입하면,

$$\frac{4b^2x_0^2}{(x_0 + a)^2} - (1 - 2x_0^2) = 0, \left(\frac{2bx_0}{x_0 + a} - \sqrt{1 - 2x_0^2}\right)\left(\frac{2bx_0}{x_0 + a} + \sqrt{1 - 2x_0^2}\right) = 0 \text{ 이므로, } \frac{2bx_0}{x_0 + a} = \sqrt{1 - 2x_0^2} \text{ 이다.}$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{ 이면, } b = \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 2a}{2\sqrt{2}}.$$