

2016학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 가형 정답

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | ④ | 2 | ⑤ | 3 | ① | 4 | ④ | 5 | ④ |
| 6 | ① | 7 | ⑤ | 8 | ⑤ | 9 | ① | 10 | ④ |
| 11 | ⑤ | 12 | ② | 13 | ③ | 14 | ① | 15 | ③ |
| 16 | ⑤ | 17 | ③ | 18 | ② | 19 | ② | 20 | ② |
| 21 | ③ | 22 | 80 | 23 | 6 | 24 | 3 | 25 | 120 |
| 26 | 20 | 27 | 47 | 28 | 25 | 29 | 24 | 30 | 243 |

해설

1. [출제의도] 벡터의 합을 계산한다.

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1, 2) + (2, -3) \\ = (-1+2, 2+(-3)) = (1, -1)$$

2. [출제의도] 일반각의 삼각함수 값을 계산한다.

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta = -\frac{1}{3}$$

3. [출제의도] 중복조합의 값을 계산한다.

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2!} = 21$$

4. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 정적분 값을 구한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx \\ = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{2} \right) - (-1) = \frac{1}{2}$$

5. [출제의도] 독립사건을 이해하여 확률을 구한다.

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2}P(B) = \frac{3}{16}$$

$$P(B) = \frac{3}{8} \text{ 이므로 } P(B^c) = \frac{5}{8}$$

6. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구한다.

$$x = 2\sin\theta - 1, \quad y = 4\cos\theta + \sqrt{3} \text{ 에서}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -4\sin\theta \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-4\sin\theta}{2\cos\theta} = -2\tan\theta$$

$$\text{따라서 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 일 때, } \frac{dy}{dx} \text{ 의 값은}$$

$$-2\tan\frac{\pi}{3} = -2\sqrt{3}$$

7. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.

점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 D와 직선 BC 사이의 거리는 \overline{DH} 의 길이와 같다.

$$\overline{CD} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{DH} = \overline{CD} \times \sin(\angle DCH)$$

$$= \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{따라서 구하는 거리는 } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

8. [출제의도] 조건부확률을 이해하여 확률을 구한다.

A, B가 주문한 것이 서로 다른 사건을 X ,

A, B가 주문한 것이 모두 아이스크림인 사건을 Y 라 하자.

$$P(X) = \frac{{}_5C_1 \times {}_4C_1}{{}_5C_1 \times {}_5C_1} = \frac{4}{5}$$

$$P(X \cap Y) = \frac{{}_2C_1 \times {}_1C_1}{{}_5C_1 \times {}_5C_1} = \frac{2}{25}$$

구하는 확률 $P(Y|X)$ 는

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{10}$$

9. [출제의도] 정규분포를 이해하여 확률을 구한다.

1인당 수하물 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(15, 4^2)$ 을 따른다. 이때, 크기가 16인 표본의 표본평균 \overline{X} 는 정규분포 $N(15, 1^2)$ 을 따른다.

$$P(\overline{X} \geq 17) = P\left(Z \geq \frac{17-15}{1}\right) = P(Z \geq 2) \\ = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) \\ = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

신호 전송 범위 d 와 수신 신호 강도 R 사이의 관계를 나타낸 그래프에서

$d=1$ 일 때 $R=-35$ 이므로

$$-35 = k - 10\log 1^n, \quad k = -35$$

$d=10$ 일 때 $R=-55$ 이므로

$$-55 = -35 - 10\log 10^n, \quad n = 2$$

수신 신호 강도가 -65 일 때

$$-65 = -35 - 10\log d^2$$

$$\text{따라서 신호 전송 범위는 } 10^{\frac{3}{2}}$$

11. [출제의도] 평면의 방정식의 성질을 이해하여 두 평면이 이루는 각의 크기를 구한다.

두 평면의 법선 벡터를 각각

$(1, \sqrt{2}, -1), (0, 0, 1)$ 이라 하면

두 평면이 이루는 각의 크기 θ 에 대하여

$$\cos\theta = \frac{|(1, \sqrt{2}, -1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \\ = \frac{|-1|}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

12. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

표본비율 $\hat{p} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ 이고 표본의 크기는 100이므로 출근 소요 시간이 60분 이상 120분 미만인 직원의 비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\frac{4}{5} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{100}} \leq p \leq \frac{4}{5} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{100}}$$

$$5000(b-a) = 5000 \times 2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{100}}$$

$$= 5000 \times 2 \times 1.96 \times \frac{4}{100}$$

$$= 784$$

13. [출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 함수가 감소하는 구간을 구한다.

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는

$$f'(x) = e^{x+1}(x^2+3x+1) + e^{x+1}(2x+3) \\ = e^{x+1}(x^2+5x+4)$$

함수 $f(x)$ 가 감소하려면 $f'(x) < 0$

$$e^{x+1}(x^2+5x+4) < 0 \text{ 에서}$$

$$e^{x+1} > 0 \text{ 이므로 } x^2+5x+4 < 0$$

함수 $f(x)$ 는 $-4 < x < -1$ 에서 감소한다.

따라서 $b-a$ 의 최댓값은 3이다.

14. [출제의도] 음함수의 미분법을 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$x^2+5xy-2y^2+11=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+5y+5x\frac{dy}{dx}-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(5x-4y)\frac{dy}{dx}=-2x-5y$$

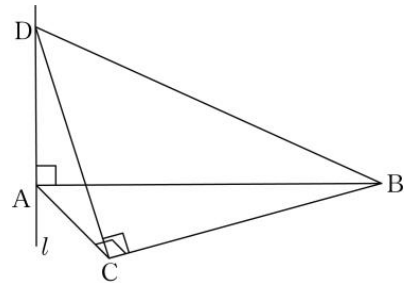
점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 2이므로

접선의 방정식 $y=2x+2$ 의

x 절편은 -1 , y 절편은 2이다.

$$\text{따라서 구하는 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2 \times |-1| = 1$$

15. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하여 공간도형의 문제를 해결한다.



점 A를 지나고 두 직선 AB, BC에 수직인 직선 l 은 평면 ABC에 수직이고, C가 l 위의 점이므로

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2} \text{ 즉, } \overline{AC} \perp \overline{BC}$$

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DC} \perp \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 선분 AC의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$$

16. [출제의도] 지수방정식을 이용하여 그래프의 성질을 추론한다.

점 $(2a-p, a-q)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(p)=q, \quad f(2a-p)=a-q \text{ 에서}$$

$$\frac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3} = a-q = a - \frac{3^p}{3^p+3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

이다. $\textcircled{1}$ 은 실수 p 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$p=0 \text{ 일 때, } \frac{3^{2a}}{3^{2a}+3} = a - \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{2}$$

이고,

$$p=1 \text{ 일 때, } \frac{3^{2a}}{3^{2a}+9} = a - \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

이다. $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $\textcircled{2}-\textcircled{3}$ 을 정리하면

$$\frac{6 \times 3^{2a}}{(3^{2a}+3)(3^{2a}+9)} = \frac{1}{4} \text{ 에서}$$

$$(3^{2a}+3)(3^{2a}+9) = 24 \times 3^{2a}$$

이므로 $3^{2a} = X (X > 0)$ 이라 하면

$$(X+3)(X+9) = 24X$$

$$X^2 - 12X + 27 = 0$$

$$X=3 \text{ 또는 } X=9$$

$$3^{2a}=3 \text{ 또는 } 3^{2a}=9$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = \boxed{1}$$

이다. 이때, ㉔에서 좌변이 양수이므로 $a > \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a = 1$ 이다.

$$\text{그러므로 } g(p) = \frac{3^p}{3^p + 3}, \quad m = 9, \quad n = 1$$

$$\text{따라서 } (m-n) \times g(2) = (9-1) \times \frac{3^2}{3^2 + 3} = 6$$

17. [출제의도] 조합을 이해하여 확률을 구한다.

오각기둥의 10개의 꼭짓점 중 임의로 3개를 택하여 삼각형을 만드는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120 \text{ 이다.}$$

i) 면 ABCDE에서 1개, 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우

면 ABCDE에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 3이므로 곱의 법칙에 의하여

$$5 \times 3 = 15$$

ii) 면 FGHIJ에서 1개, 면 ABCDE에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우

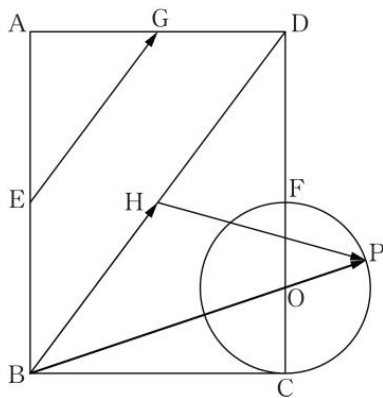
면 FGHIJ에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 면 ABCDE에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 3이므로 곱의 법칙에 의하여

$$5 \times 3 = 15$$

i), ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여 $15 + 15 = 30$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{30}{120} = \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

18. [출제의도] 벡터의 기하학적인 성질을 이용하여 두 벡터의 합의 크기의 최댓값을 추론한다.



$$|\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{BP}| \text{ 이므로}$$

$|\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HP}|$ 의 최댓값은 $|\overrightarrow{BP}|$ 의 최댓값과 같다.

즉, 원 밖의 한 점 B에서 원 위의 점 P에 이르는 거리의 최댓값이다.

따라서 원의 중심을 O라 하면 $|\overrightarrow{BP}|$ 의 최댓값은

$$\overline{BO} + 2 = \sqrt{6^2 + 2^2} + 2 = 2\sqrt{10} + 2$$

19. [출제의도] 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$$f(2a-x) = f(x) \text{ 이므로}$$

$$\int_0^a \{f(2x) + f(2a-x)\} dx$$

$$= \int_0^a f(2x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_0^a f(2x) dx \text{ 에서 } 2x = t \text{ 로 치환하면}$$

$$\int_0^a f(2x) dx = \int_0^{2a} f(t) \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2a} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \int_0^a f(t) dt = 8$$

$$\int_0^a f(2x) dx + \int_0^a f(x) dx = 8 + 8 = 16$$

20. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

접선이 x 축과 만나는 점을 A라 하면 $\angle OAP = \frac{\pi}{6}$

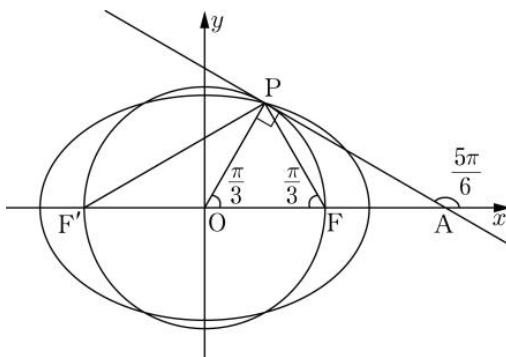
이고, 직선 OP는 접선과 수직이므로 $\angle POF = \frac{\pi}{3}$

삼각형 POF는 정삼각형이므로

$$\angle PFO = \frac{\pi}{3}, \quad \overline{PF} = 6$$

선분 F'F는 지름이므로 직각삼각형 FPF'에서

$$\overline{PF'} = \overline{PF} \times \tan \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$$



따라서 두 점 F, F'은 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의해 장축의 길이는 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 6 + 6\sqrt{3}$

21. [출제의도] 미분의 성질을 이용하여 그래프의 개형을 추론한다.

$$\neg. \quad g(-x) = \frac{\sin f(-x)}{-x} = \frac{\sin f(x)}{-x} = -g(x)$$

이므로 모든 양의 실수 x 에 대하여

$$g(-x) = -g(x) \text{ 이다. (참)}$$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로

조건 (다)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이고,

조건 (가)에서 $f'(x) = -f'(-x)$ 이므로 $f'(0) = 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin f(x)}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x} \right) \\ &= 1 \times f'(0) = 0 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\text{ㄷ. } g(\alpha) = \frac{\sin f(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} > 0 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{ 이므로 } 0 < x < \alpha \text{ 에서}$$

함수 $g(x)$ 가 증가하는 구간이 있다.

$$g'(x) = \frac{xf'(x)\cos f(x) - \sin f(x)}{x^2} \text{ 에서}$$

$$g'(\alpha) = \frac{\alpha f'(\alpha)\cos f(\alpha) - \sin f(\alpha)}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha^2} < 0$$

그러므로 함수 $g(x)$ 는 구간 $(0, \alpha)$ 에서 $\frac{1}{\alpha}$ 보다 큰 극댓값을 갖는다.

$$\text{따라서 방정식 } g(x) = \frac{1}{\alpha} \text{ 은 } 0 < x \leq \alpha \text{ 에서}$$

적어도 2개의 서로 다른 실근을 갖는다.

$$g(-x) = -g(x) \text{ 이므로 방정식 } g(x) = -\frac{1}{\alpha} \text{ 은}$$

구간 $-\alpha \leq x < 0$ 에서 적어도 2개의 서로 다른

$$\text{실근을 가지므로 방정식 } |g(x)| = \frac{1}{\alpha} \text{ 은 적어도}$$

4개의 서로 다른 실근을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

22. [출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 분산을

계산한다.

$$V(X) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$$

$$V(6X) = 36V(X) = 36 \times \frac{20}{9} = 80$$

23. [출제의도] 치환적분을 계산한다.

$$\sin x = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \cos x \text{ 이고}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 일 때 } t = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ 일 때 } t = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(\sin x) \cos x dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f'(t) dt \\ &= f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \end{aligned}$$

24. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.

$$\text{함수 } f(x) = e^{x-1} \text{ 에서 } e^{x-1} = 1 \text{ 일 때 } x = 1$$

즉, $g(1) = 1$ 이다.

따라서 $f'(x) = e^{x-1}$ 이므로

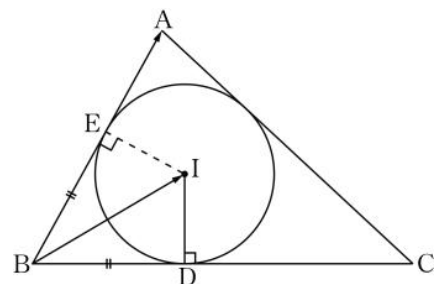
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-2h)}{h} \\ = 3g'(1) = \frac{3}{f'(1)} = \frac{3}{e^{1-1}} = 3 \end{aligned}$$

25. [출제의도] 벡터의 성질을 이해하여 내적을 구한다.

점 I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면

$$\overline{BE} = \overline{BD} = 8 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} &= |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BI}| \cos(\angle EBI) \\ &= |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BE}| = 15 \times 8 = 120 \end{aligned}$$



26. [출제의도] 합의 법칙을 이해하여 경우의 수를 구한다.

i) 꽃병 A에 장미를 꽂은 경우

꽃병 B에 꽃을 꽂 9송이 중 카네이션이 a 송이, 백합이 b 송이라 하면 (a, b) 로 가능한 경우의 수는 $(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ 의 6이다.

ii) 꽃병 A에 카네이션을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽃을 꽂 9송이 중 장미가 a 송이, 백합이 b 송이라 하면 (a, b) 로 가능한 경우의 수는 $(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)$ 의 8이다.

iii) 꽃병 A에 백합을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽃을 꽂 9송이 중 카네이션이 a 송이, 장미가 b 송이라 하면 (a, b) 로 가능한 경우의 수는 $(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$ 의 6이다.

i), ii), iii)에서 구하는 경우의 수는 $6 + 8 + 6 = 20$

27. [출제의도] 정사영의 성질을 이용하여 두 평면이 이루는 각을 구한다.

점 P가 선분 BC를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\triangle ABP = \frac{1}{3} \times \triangle ABC = \frac{1}{3} \times 27 = 9$$

점 Q가 선분 AP를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\triangle ABQ = \frac{2}{3} \times \triangle ABP = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

점 Q가 선분 BH의 중점이므로

$$\triangle ABH = 2 \times \triangle ABQ = 2 \times 6 = 12$$

