2019학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 출제 영역 및 모범답안

시험유형	인문·사회계	자연계	의학계
	☐	☐	☑

【 문항 총괄 】

문항번호		출제범위(고교 과목명)	핵심개념 및 용어	배점 (총 100점)
1	1-1	기하와 벡터	삼수선의 정리, 정사영의 성질 이용하여 두 평면이 이루는 각, 정사영의 넓이 구하기	10
	1-2	기하와 벡터		20
2	2-1	미분과 적분Ⅱ	중간값의 정리, 함수의 최댓값, 수열의 극한 구하기	7
	2-2	미분과 적분Ⅱ		13
	2-3	미분과 적분Ⅱ		15
3	3-1	확률과 통계	조합, 독립시행의 확률, 배반사건, 독립사건	15
	3-2	확률과 통계		20

1. 의학계 문항1

출제 의도 및 문항해설

본 문항에서는 삼수선의 정리를 이용하여 조건을 만족하는 점이 나타내는 도형의 넓이를 구할 수 있으며, 정사영의 성질을 이용하여 두 평면이 이루는 각을 구한 후 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

1-1. 정사면체에서 움직이는 두 선분이 수직으로 만나는 점이 나타내는 도형을 삼수선의 정리를 이용하여 명확하게 기술하고, 그 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

1-2. 두 삼각형의 위치관계를 이해하고, 정사영의 성질을 이용하여 두 평면이 이루는 각을 구한 후 삼각형의 정사영의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

출제 근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2017	155-165

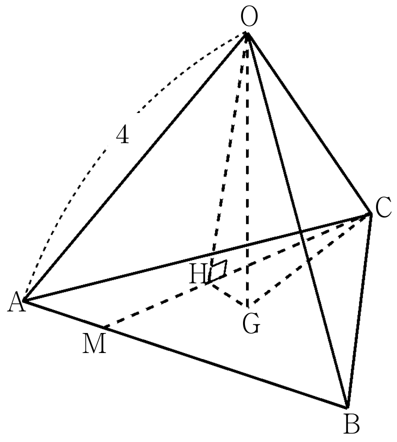
채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	점 H가 나타내는 도형은 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 선분 CG를 지름으로 하는 원이라는 사실을 기술할 수 있다.	5
	주어진 영역의 넓이를 구할 수 있다.	5
1-2	두 평면 OMC와 OAB가 이루는 각을 구할 수 있다.	10
	삼각형 OHC의 넓이를 구할 수 있다.	5
	삼각형 OHC의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있다.	5

예시 답안

[1-1]

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 $\overline{\mathrm{OG}} \perp (\text{평면}\mathrm{ABC})$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp \overline{\mathrm{MC}}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{GH}} \perp \overline{\mathrm{MC}}$ 이다. 따라서 삼각형 GHC는 $\angle \mathrm{GHC} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 따라서 점 M이 변 AB 위를 움직일 때 점 H가 나타내는 도형은 삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여 $\overline{\mathrm{CG}}$를 지름으로 하는 원의 일부이다.

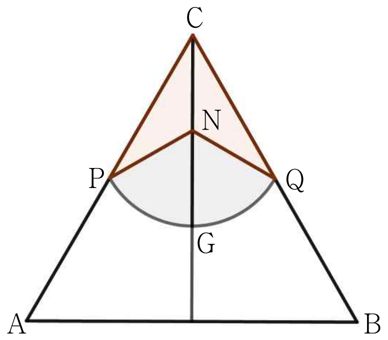


변 AC 와 변 BC 의 중점을 각각 P 와 Q, 선분 CG 의 중점을 N 이라 하면 $\overline{CG}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\overline{CN}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

부채꼴 NPQ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{9}$ 이고,

삼각형 NPC 와 삼각형 NQC 의 넓이는 모두 $\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

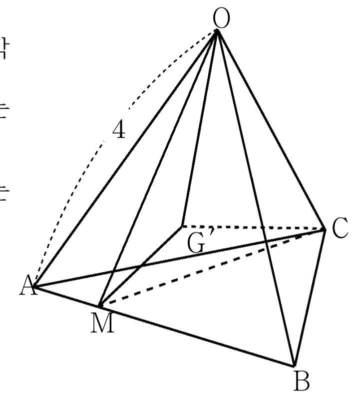
따라서 점 H 가 나타내는 도형과 삼각형 ABC 의 두 변 AC, BC 로 둘러싸인 영역의 넓이 $S=\frac{4\pi}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.



[1-2]

피타고라스 정리에 의해 $\overline{OM}=\overline{CM}=\sqrt{13}$, $\overline{OH}=\frac{12}{\sqrt{13}}$ 이므로 삼각형 OMC 의 넓이는 6 이다.

삼각형 OAB 의 무게중심을 G′라 하면 삼각형 OMC 의 평면 OAB 위로의 정사영은 삼각형 OMG′가 된다. 삼각형 OMG′의 넓이는 삼각형 OAB 의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로 삼각형 OMG′의 넓이는 $4\sqrt{3}\times\frac{1}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. 따라서 평면 OMC 와 평면 OAB 가 이루는 각을 θ 라고 하면 $\cos\theta=\frac{\triangle OMG'}{\triangle OMC}=\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{9}$ 이다.

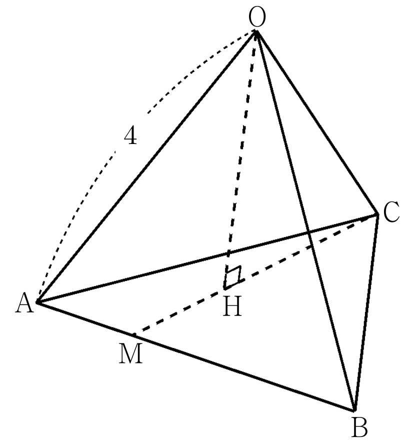


한편, 피타고라스 정리에 의해 $\overline{HC}=\frac{8}{\sqrt{13}}$ 이므로 삼각형 OHC 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{8}{\sqrt{13}}\times\frac{12}{\sqrt{13}}=\frac{48}{13}$ 이다.

그러므로 삼각형 OHC 의 평면 OAB 위로 정사영의 넓이는

$$S=\frac{48}{13}\times\cos\theta=\frac{48}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{16\sqrt{3}}{39}$$

이다.



2. 의학계 문항2

출제 의도 및 문항해설

본 문항은 다항식과 두 직선으로 둘러싸인 영역에 최대 직사각형 및 정사각형의 넓이를 함수로 표현하고 이를 응용하는 문항이다.

2-1. 함수의 최댓값과 수열의 극한을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

2-2. 이 문항에서는 평균값의 정리를 이용하여 주어진 부등식과 이를 이용한 부등식을 증명할 수 있는지, 수열의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

2-3. 주어진 구간에서 증가함수이면 함수의 값이 증가할 뿐만 아니라 역으로 함수의 값이 더 크면 즉, $g(\alpha) < g(\beta)$이면 $\alpha < \beta$인 사실을 응용할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

출제 근거

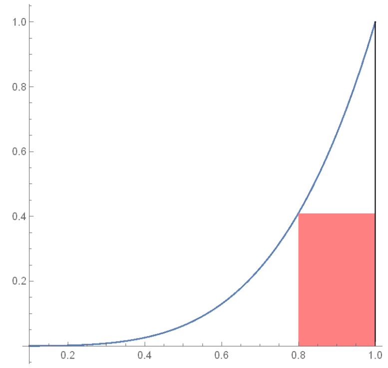
참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분Ⅰ	이준열 외	천재교육	2017	10-29
	미적분Ⅱ	이준열 외	천재교육	2017	10-31 128-158

채점 기준

하위 문항	채점 기준		배점
2-1	직각삼각형의 면적 $A_n(t)=(1-t)t^n$ 을 수식으로 작성할 수 있다.		2점
	B_n를 구할 수 있다.		1점
	$t_n = \dfrac{n}{n+1}$ 의 값을 구할 수 있다.		2점
	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n(t_n)}{B_n}$ 의 값을 구할 수 있다.		2점
2-2	(a)	부등식을 증명 할 수 있다.	5점
	(b)	부등식을 증명 할 수 있다.	5점
	(c)	극한을 구할 수 있다.	3점
2-3	$s_n < 1-\dfrac{k}{n}$ 를 구할 수 있다.		5점
	$(n+1)A_n(s_n) \le 2\dfrac{k}{e^k}$ 를 구할 수 있다.		5점
	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n}{B_n}$ 의 값을 구할 수 있다.		5점

예시 답안

[2-1]



$A_n(t)=(1-t)t^n$ 이고 $A_n'(t)=nt^{n-1}-(n+1)t^n = t^{n-1}(n-(n+1)t)$이므로

$t=\dfrac{n}{n+1}$ 에서 극대이면서 $0\le t\le 1$ 에서 최대이다. 따라서 $t_n=\dfrac{n}{n+1}$ 이고

$$\begin{cases} A_n(t)\text{는 증가함수, } 0<t<t_n=\dfrac{n}{n+1} \\ A_n(t)\text{는 감소함수, } t_n=\dfrac{n}{n+1}\le t<1 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

이다. B_n을 제시문 (가)를 이용하여 넓이를 구하면

$$B_n=\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

이다. 그러므로

$$\frac{A_n(t_n)}{B_n}=\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \div \frac{1}{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n(t_n)}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

이다.

[2-2]

(a) $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$이라 하면, 함수 $g(x)$는 $0<x\le 1$인 x에 대하여 $[0,\ x]$에서 연속이고, $(0,\ x)$에서 미분가능이므로 평균값의 정리에 의해

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(c) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

을 만족하는 $0 < c < x \le 1$ 인 c 가 적어도 한 개 존재한다.

한편, $g'(c) = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{c}{n}} = \dfrac{1}{n+c}$ 이고, $0 < c < 1$ 에서 $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n+c} < \dfrac{1}{n}$ 이므로

$$\frac{1}{n+1} < g'(c) < \frac{1}{n} \quad \cdots\cdots \text{ ㉡}$$

이다. ㉠에서 $g(0)=0$ 이므로 $g'(c) = \dfrac{g(x)}{x}$ 이고, 이것을 ㉡에 대입하면

$$\frac{1}{n+1} < \frac{g(x)}{x} < \frac{1}{n}$$

이다. 따라서, 양변에 x 를 곱하면

$$\frac{x}{n+1} < g(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n}$$

가 성립한다.

(b) 임의의 자연수 k 에 대하여 m 이 $m > ke^{2k}$ 를 만족하므로

$$0 < \frac{k}{m-k} < \frac{k}{ke^{2k}-k} = \frac{1}{e^{2k}-1} < 1$$

이 되어 (a)로 부터

$$\ln\left(1+\frac{k}{m-k}\right)^m = m \times \ln\left(1+\frac{k}{m-k}\right) \le m\frac{k}{m-k} = k\left(1+\frac{k}{m-k}\right) < k(1+1) = 2k\,,$$

$$\ln\left(1+\frac{k}{m-k}\right)^m = m \times \ln\left(1+\frac{k}{m-k}\right) > m\frac{k}{m-k+1} = \frac{m}{m-k+1}k > k$$

이다. 이를 정리하면

$$e^k < \left(1+\frac{k}{m-k}\right)^m < e^{2k}$$

이다. 즉, 자연수 k 에 대하여 m 이 $m > ke^{2k}$ 를 만족하면

$$\frac{1}{e^{2k}} < \left(1-\frac{k}{m}\right)^m < \frac{1}{e^k}$$

이 성립한다.

(c) $p(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ (단, $x > 0$)이라 하자.

$p'(x) = \dfrac{2x-x^2}{e^x}$ 이므로 $x=2$ 에서 함수 $p(x)$ 는 극댓값을 갖는다.

그러므로

$$0 < p(x) = \frac{x^2}{e^x} \le p(2) = \frac{4}{e^2}$$

이다. 양변을 x 로 나누면

$$0 < \frac{x}{e^x} \le \frac{4}{e^2 x}$$

이고 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4}{e^2x} = 0$ 이므로 제시문 (나)에 의하여 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ 이다.

[2-3]

$h(x) = x^n - (1-x) = x^n + x - 1$ 이라 하고 모든 자연수 k 에 대하여 n 이 $n > ke^{2k}$ 를 만족하면 조건 $n > ke^{2k}$ 와 [2-2]의 (b)에 의하여

$$h\left(1-\frac{k}{n}\right) = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n + \left(1-\frac{k}{n}\right) - 1 = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n - \frac{k}{n} > \frac{1}{e^{2k}} - \frac{1}{e^{2k}} = 0 = h(s_n)$$

이다.

한편, $h'(x) = nx^{n-1}+1$ 이고 구간 $[0,\ 1]$ 에서 $h'(x) > 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 구간 $[0,\ 1]$ 에서 증가한다. 따라서 제시문 (다)에 의해

$$s_n < 1-\frac{k}{n} \quad \text{.................................②}$$

이다. 또한, $1-\dfrac{k}{n} \le 1-\dfrac{1}{n}$ 이므로 [2-1]의 내용 ①에서 $A_n(t)$ 는 구간 $0 < t < 1-\dfrac{1}{n}$ 에서 증가함수이다. 따라서 ②와 [2-2]의 (b)에 의하여 모든 자연수 k 에 대하여 n 이 $n > ke^{2k}$ 를 만족하면

$$(n+1)A_n(s_n) \le (n+1)\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n+1}{n} \times k \times \left(1-\frac{k}{n}\right)^n$$

$$< \frac{n+1}{n} \times \frac{k}{e^k} < \left(1+\frac{1}{ke^{2k}}\right)\frac{k}{e^k} < 2\frac{k}{e^k}$$

이다.

그러므로 [2-2]의 (c)와 “모든 양의 실수 보다 작은 음이 아닌 실수는 0이다”라는 사실로부터

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)A_n(s_n) = 0$$

이다.

3. 의학계 문항3

출제 의도 및 문항 해설

본 문항에서는 독립시행의 확률과 조합을 이해하고 주어진 조건에 맞는 확률과 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하고자 한다.
주어진 복잡한 상황을 잘 해석하여 단순한 상황들로 분할하여 합리적으로 생각할 수 있다는 것은 매우 중요하다. 본 문항은 합의 법칙, 곱의 법칙, 독립시행의 확률 등을 이용하여 주어진 상황에 맞는 확률과 경우의 수를 구할 수 있는지, 풀이 과정을 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

3-1. 문제 상황을 파악하고 상황에 맞는 사건을 구성하여 조건에 맞는 확률을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

3-2. [3-1]에서 고려한 사건을 이용하여 조건에 맞는 경우의 수를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

출제 근거

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	32-42, 82-86
	확률과 통계	이강섭 외	미래엔	2017	30-33, 79-82
	확률과 통계	김창중 외	교학사	2017	29-33, 98-101
	확률과 통계	우정호 외	동아출판	2017	52-56, 126-130
	확률과 통계	장상권 외	금성출판사	2017	36-40, 102-107

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	검정색 칸 5 에 이동한 후 F에 도착할 확률을 구할 수 있다.	5점
	검정색 칸 50 에 이동한 후 F에 도착할 확률을 구할 수 있다.	5점
	검정색 칸 10 부터 45 중 한 곳에 이동한 후 F에 도착할 확률을 구할 수 있다.	5점
3-2	검정색 칸 5 와 50 에 이동한 후 F에 도착할 경우의 수를 구할 수 있다.	5점
	검정색 칸 5 와 15 부터 45 중 한 곳에 이동한 후 F에 도착할 경우의 수를 구할 수 있다.	5점
	검정색 칸 10 부터 40 중 한 곳과 50 에 이동한 후 F에 도착할 경우의 수를 구할 수 있다.	5점
	검정색 칸 10 부터 45 중 인접하지 않는 두 곳에 이동한 후 F에 도착할 경우의 수를 구할 수 있다.	5점

예시 답안

[3-1]

	S또는 검정색					검정색	
사건 A	(출발)					(도착)	
사건 B	(출발)					(건너뜀)	(도착)
사건 C		(출발)				(도착)	
사건 D		(출발)				(건너뜀)	(도착)

위의 표처럼 사건 A, B, C, D를 정의한다. 예를 들면 사건 A는 바둑돌이 S 또는 검정색 칸에서 출발하여 바로 다음에 나오는 검정색 칸에 도착하는 사건이고 사건 D는 바둑돌이 S 또는 검정색 칸 바로 다음 칸에서 출발하여 바로 다음에 나오는 검정색 칸을 건너뛰어서 그 다음 칸으로 이동하는 사건이다. 사건 A가 발생할 확률은 앞면이 5회 연속으로 나오거나, 앞면 3회 뒷면 1회 나오거나, 앞면 1회 뒷면 2회 나올 경우이므로 제시문 (나)와 (다)에 의해서

$$p_A = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3\times 7}{2^5}$$

사건 B가 발생하기 위해서는 앞면이 4회 연속으로 나온 후 뒷면이 나오거나, 앞면이 2회 뒷면이 1회 나온 후 마지막에 뒷면이 나오거나 또는 뒷면이 3회 연속으로 나와야 한다. 제시문 (나)와 (다)에 의해서 사건 B가 발생할 확률은

$$p_B = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{11}{2^5}$$

마찬가지로 사건 C와 D가 발생할 확률은 각각 다음과 같다.

$$p_C = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{2^4}, \qquad p_D = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^4}$$

1) 검정색 칸 5 에 이동한 후 F에 도착할 확률

사건 A가 처음 발생하고 이어서 사건 B가 발생한 후 사건 D가 연속으로 8회 발생해야 하므로 제시문 (라)에 의해서

$$p_1 = p_A p_B (p_D)^8 = \frac{3\times 5^8\times 7\times 11}{2^{42}}$$

2) 검정색 칸 50 에 이동한 후 F에 도착할 확률

사건 B가 처음 발생하고 이어서 사건 D가 연속으로 8회 발생한 후 이어서 사건 C가 발생해야 한다. 그리고 마지막으로 동전의 앞면이 나와야 하므로 제시문 (라)에 의해서

$$p_2 = p_B(p_D)^8 p_C \times \frac{1}{2} = \frac{5^8 \times 11^2}{2^{42}}$$

3) 검정색 칸 10 부터 45 중 한 곳에 이동한 후 F에 도착할 확률

총 8가지 경우로 사건 B가 처음 발생하고 사건 C가 1회, 사건 B가 1회, 사건 D가 7회 발생해야 하므로 제시문 (라)에 의해서

$$p_3 = 8p_B p_C p_B (p_D)^7 = \frac{2^3 \times 5^7 \times 11^3}{2^{42}}$$

바둑돌이 시작 지점 S에서 출발하여 마지막 지점 F에 도착할 때까지 검정색 칸 위에 있었던 횟수가 1회일 확률은 제시문 (다)에 의해서

$$p_1 + p_2 + p_3 = \frac{2^3 \times 3 \times 5^7 \times 11 \times 47}{2^{42}} = \frac{3 \times 5^7 \times 11 \times 47}{2^{39}}$$

그러므로 $p = 47$이다.

[3-2]

위의 예시처럼 사건 A가 일어날 경우의 수는 8, 사건 B가 일어날 경우의 수는 5, 사건 C가 일어날 경우의 수는 5, 그리고 사건 D가 일어날 경우의 수는 3이다.

1) 검정색 칸 5 와 50 에 이동한 후 F에 도착할 경우

사건 A가 처음 발생한 후 사건 B가 발생하고 사건 D가 7회 연속으로 발생한 후 마지막으로 사건 C가 발생해야 한다. 이러한 경우는 수는 제시문 (라)에 의해서

$$h_1 = AB(D)^7C = 8 \times 5 \times 3^7 \times 5 = 2^3 \times 3^7 \times 5^2$$

2) 검정색 칸 5 와 15 부터 45 중 한 곳에 이동한 후 F에 도착할 경우

총 7가지 경우로 사건 A가 처음 발생한 후 사건 B가 발생해야 하며 사건 C가 1회, 사건 B가 1회, 사건 D가 6회 발생해야 한다. 이러한 경우는 수는 제시문 (라)에 의해서

$$h_2 = 7ABCB(D)^6 = 7 \times 8 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3^6 = 2^3 \times 3^6 \times 5^3 \times 7$$

3) 검정색 칸 10 부터 40 중 한 곳과 50 에 이동한 후 F에 도착할 경우

총 7가지 경우로 사건 B가 처음 발생하고 사건 C가 1회, 사건 B가 1회, 사건 D가 6회 발생한 후 마지막으로 사건 C가 발생해야 한다. 이러한 경우는 수는 제시문 (라)에 의해서

$$h_3 = 7BCB(D)^6C = 7 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3^6 \times 5 = 3^6 \times 5^4 \times 7$$

4) 검정색 칸 10 부터 45 중 인접하지 않는 두 곳에 이동한 후 F에 도착할 경우

총 8칸 중 2곳을 선택한 후 인접한 두 곳이 선택된 7개의 경우를 제외하면 제시문 (가)에 의해서 ${}_8C_2 - 7 = 21$ 가지의 경우로 사건 B가 처음 발생하고 사건 C와 B가 각각 2회씩 발생해야 하며 사건 D가 5회 발생해야 한다. 이러한 경우는 수는 제시문 (라)에 의해서

$$h_4 = 21B(C)^2(B)^2(D)^5 = 21 \times 5 \times 5^2 \times 5^2 \times 3^5 = 3^6 \times 5^5 \times 7$$

모든 경우의 수는 제시문 (다)에 의해서

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 2^3 3^7 5^2 + 2^3 3^6 5^3 7 + 3^6 5^4 7 + 3^6 5^5 7 = 2 \times 3^6 \times 5^2 \times 677$$

그러므로 $q = 677$이다.