

문항 4

출제지도 및 평가기준

01. 출제지도

- 가) 접선의 방정식의 의미를 이해하고 구할 수 있는지 확인한다.
- 나) 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
- 다) 조건을 만족하는 모든 점을 좌표평면 위에 나타낼 수 있는지 확인한다.
- 라) 타원의 의미를 이해하고 구할 수 있는지 확인한다.
- 마) 연립방정식을 풀 수 있는지 확인한다.
- 바) 이차방정식의 판별식의 의미를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 확인한다.

02. 평가기준

[문제] (90점)

곡선 $y = f(x)$, 곡선 $y = g(x)$ 에 동시에 접하는 직선을 l , 곡선 $y = f(x)$ 와의 교점을 $\left(p, \frac{1}{p}\right)$, 곡선 $y = g(x)$ 와의 교점을 $\left(q, \frac{1}{q+a} - b\right)$ 라고 하면 직선 l 위의 점 (x, y) 는 다음 두 식을 모두 만족하여야 한다.

$$y = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p}, \quad y = -\frac{1}{(q+a)^2}x + \frac{q}{(q+a)^2} + \frac{1}{q+a} - b.$$

따라서

$$p^2 = (q+a)^2, \quad \frac{2}{p} = \frac{q}{(q+a)^2} + \frac{1}{q+a} - b. \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$p < 0$ 이고 $q > -a$ 이므로 ①의 첫 번째 식에서 $q+a = -p$ 이 되고 두 번째 식에 대입하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{a}{p^2} + \frac{4}{p} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad h(p) = bp^2 + 4p + a = 0 \quad (\text{단, } p < 0)$$

그러므로 방정식 $h(x) = 0$ 이 음수인 해를 한 개 이상 가져야 한다.

10점

I) $b = 0$ 인 경우

$h(x) = 4x + a$ 가 되어 $a > 0$ 이면 방정식 $h(x) = 0$ 은 음수인 해를 갖는다.

II) $b \neq 0$ 인 경우

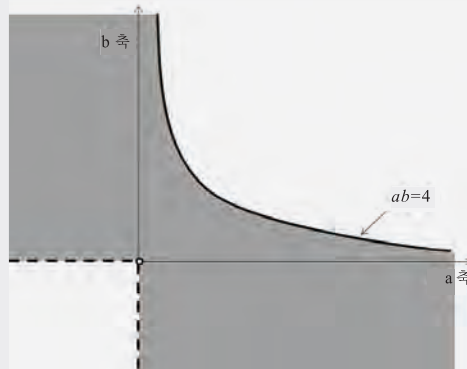
$h(x) = b\left(x^2 + \frac{4}{b}x + \frac{a}{b}\right)$ 이다. 따라서 $\frac{a}{b} < 0$ 이면 방정식 $h(x) = 0$ 은 양수와 음수인 실근을 각각 하나씩 갖는다.

$\frac{a}{b} \geq 0$ 이면 이차 방정식의 판별식과 근과 계수와의 관계로부터 방정식 $h(x) = 0$ 은

$4 - ab \geq 0$ 이고 $-\frac{4}{b} < 0$ 일 때 음수의 실근을 갖는다.

30점

I), II)으로부터 영역 D 는 $b > 0$ 이면 $ab \leq 4$ 이고 $b \leq 0$ 이면 $a > 0$ 이다. 이를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



10점

점 R 이 영역 D 에 속하지 않으므로, 다음이 성립한다.

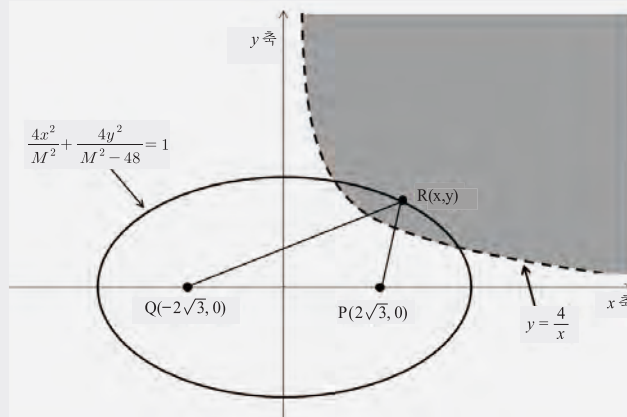
$$xy > 4 \quad (x > 0)$$

그리고 타원의 정의로부터 점 R 은 장축의 길이가 M 이고 두 초점이 각각 P, Q 인 타원 위에 있다. 따라서

$$\frac{4x^2}{M^2} + \frac{4y^2}{M^2 - 48} = 1 \quad (\text{단, } M^2 > 48)$$

도 만족한다.

10점



10점

위의 그림으로부터 선분 \overline{PR} 의 길이와 선분 \overline{QR} 의 길이의 합 M 이 갖는 범위는 다음의 연립 방정식이 서로 다른 두 교점을 갖게 하는 범위와 같다.

$$\frac{4x^2}{M^2} + \frac{4y^2}{M^2 - 48} = 1, \quad y = \frac{4}{x} \quad (\text{단, } x, y > 0, M^2 > 48)$$

따라서

$$\frac{4x^2}{M^2} + \frac{4^3}{(M^2 - 48)x^2} = 1$$

$$\Rightarrow 4(M^2 - 48)t^2 - M^2(M^2 - 48)t + 4^3M^2 = 0 \quad (\text{단, } t = x^2)$$

위의 방정식이 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 하므로, 2차방정식의 판별식과 근과 계수와의 관계로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$M^4 - 48M^2 - 4^5 > 0 \Rightarrow M^2 > 64$$

따라서 M 의 값의 범위는 다음과 같다.

$$M > 8.$$

20점