4. 자연Ⅱ

[문제1] 부등식 $|y+|x-2|-4|+|y-|x+2|+4|\le 4$을 만족하는 좌표평면 위의 점의 집합을 D라 할 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 부등식 $(y+|x-2|-4)(y-|x+2|+4)\le 0$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

(2) 부등식 $2y+|x-2|-|x+2|\le 4$을 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내시오.

(3) 집합 D의 영역을 좌표평면 위에 나타내고 넓이를 구하시오.

■ 출제의도

이 문제는 부등식의 영역에 대한 이해를 활용하여 일차함수와 절댓값의 결합으로 나타난 부등식의 해를 구하는 문제이다. 이 과정에서 주어진 부등식의 해를 구하기 위한 조건을 부등식의 영역을 활용하여 이끌어 내는 수리적 능력, 절댓값과 1차함수의 합성으로 주어진 함수의 그래프를 활용하여 연립 부등식의 해를 구하는 수학 개념의 종합적 활용 능력과 풀이 과정에서 나타나는 여러 가지 계산을 효과적으로 기획하고 면밀하게 수행하는 능력을 평가하고자 한다.

■ 우수답안 및 해설

(1) 부등식 $(y+|x-2|-4)(y-|x+2|+4)\le 0$은 다음 두 영역으로 나누어진다.

$$\text{(i)}\ \ y+|x-2|\le 4 \ \text{ 이고 }\ y-|x+2|\ge -4$$

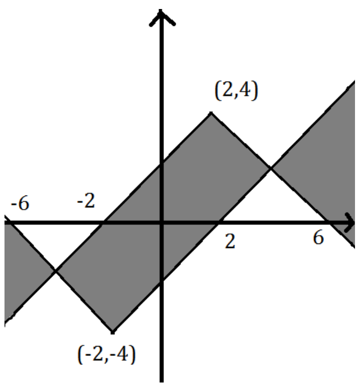
$$\text{(ii)}\ \ y+|x-2|\ge 4 \ \text{ 이고 }\ y-|x+2|\le -4$$

따라서 부등식을 만족하는 영역은 그래프 $y=-|x-2|+4$와 $y=|x+2|-4$에 의하여 분할된 좌표평면의 영역들 중 원점 (0,0)을 포함한 영역과 이 영역에 인접하지 않는 영역이다. 따라서 다음 두 집합

$$\{(x,y)\ |\ -4\le x\le 4,\ |x+2|-4\le y\le -|x-2|+4\}$$

$$\{\ (x,y)\ |\ x\le -4 \text{ 또는 } 4\le x,\ -|x-2|+4\le y\le |x+2|-4\}$$

의 합집합이며 구하는 영역은 아래와 같다.



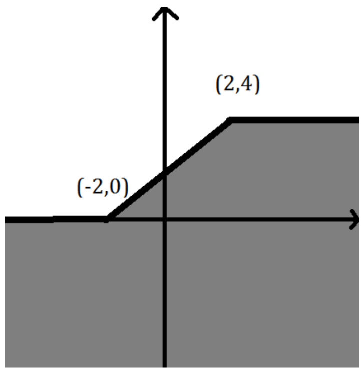
(2) 주어진 부등식 $2y+|x-2|-|x+2|\le 4$이 나타내는 영역은

$$y=\frac{|x+2|-|x-2|}{2}+2$$

의 그래프 아래쪽의 점들이다. x의 값에 따라 $x\le -2$, $-2<x<2$, $2\le x$로 나누어서 그래프를 그리면

$$y=\begin{cases} 4 & 2\le x \\ x+2 & -2<x<2 \\ 0 & -2\ge x \end{cases}$$

이다. 따라서 구하는 영역은 아래와 같다.



(3) 절댓값 부호를 풀기 위하여 아래와 같이 그래프 $y=-|x-2|+4$와 $y=|x+2|-4$로 나누어지는 좌표 평면의 영역을 생각한다.

(i) $y+|x-2|\ge 4$ 이고 $y-|x+2|\ge -4$

(ii) $y+|x-2|\le 4$ 이고 $y-|x+2|\le -4$

(iii) $y+|x-2|\le 4$ 이고 $y-|x+2|\ge -4$

(iv) $y+|x-2|\ge 4$ 이고 $y-|x+2|\le -4$

(ㄱ)[영역(i)] $y+|x-2|\ge 4$ 이고 $y-|x+2|\ge -4$ 일 때 부등식을 풀면

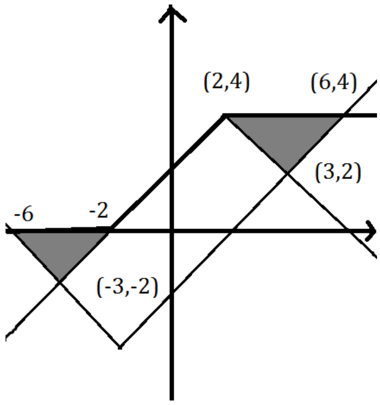
$$y+|x-2|-4+y-|x+2|+4\le 4$$

$$\Rightarrow\ 2y+|x-2|-|x+2|\le 4$$

이다. 그래프 $2y+|x-2|-|x+2|=4$과 $y+|x-2|=4$는 $-2\le x\le 2$에서 만나고, 그래프 $2y+|x-2|-|x+2|=4$과 그래프 $y-|x+2|=-4$는 $x=\pm 6$에서 만난다. 따라서 주어진 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} y+|x-2|\ge 4 \\ y-|x+2|\ge -4 \\ 2y+|x-2|-|x+2|\le 4 \end{cases}$$

을 모두 만족하는 좌표 평면의 점으로 문항(2)에 따라 구하는 영역은 다음과 같다.



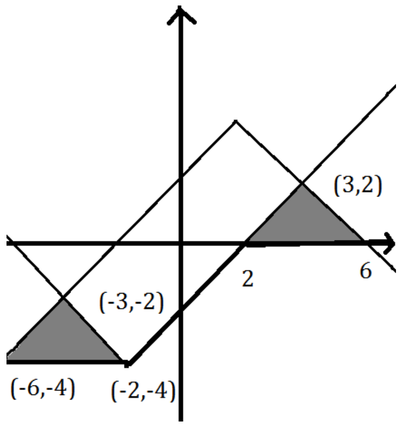
(ㄴ)[영역(ii)] $y+|x-2|\le 4$ 이고 $y-|x+2|\le -4$ 일 때, 부등식을 풀면

$$y+|x-2|-4+y-|x+2|+4\ge -4$$
$$\Rightarrow\quad 2y+|x-2|-|x+2|\ge -4$$

이다. 영역 (i) 과 마찬가지로 그래프들을 살펴보면 그래프 $2y+|x-2|-|x+2|=-4$과 $y+|x-2|=4$는 $x=\pm 6$에서 만나고, 그래프 $2y+|x-2|-|x+2|=-4$과 그래프 $y-|x+2|=-4$는 $-2\le x\le 2$에서 만난다. 따라서 주어진 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} y+|x-2|\le 4 \\ y-|x+2|\le -4 \\ 2y+|x-2|-|x+2|\ge -4 \end{cases}$$

을 모두 만족하는 좌표 평면의 점으로 구하는 영역은 아래와 같다.



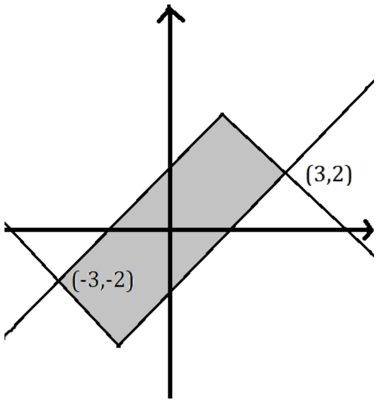
(ㄷ)[영역(iii)] $y+|x-2|\le 4$ 이고 $y-|x+2|\ge -4$일 때, 부등식을 풀면

$$-y-|x-2|+4+y-|x+2|+4\le 4$$
$$\Rightarrow\quad |x-2|+|x+2|\ge 4$$

이다. 주어진 영역에서 x는 $-3\le x\le 3$이므로 부등식 $|x-2|+|x+2|\ge 4$이 항상 성립한다. 따라서 주어진 세 부등식

$$\begin{cases} y+|x-2|\le 4 \\ y-|x+2|\ge -4 \\ |x-2|+|x+2|\ge 4 \end{cases}$$

을 만족하는 좌표평면의 점의 집합은 주어진 영역과 같으며 아래 그림과 같다.



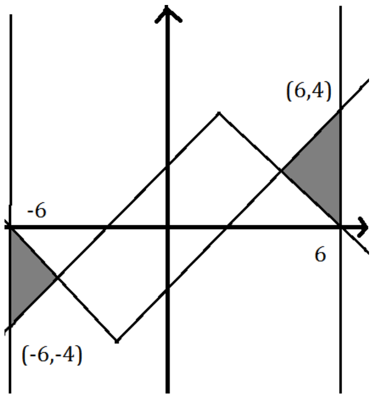
(ㄹ)[영역(iv)] $y+|x-2|\ge 4$ 이고 $y-|x+2|\le -4$일 때, 부등식을 풀면

$$y+|x-2|-4-y+|x+2|-4\le 4$$
$$\Rightarrow\quad |x-2|+|x+2|\le 12$$

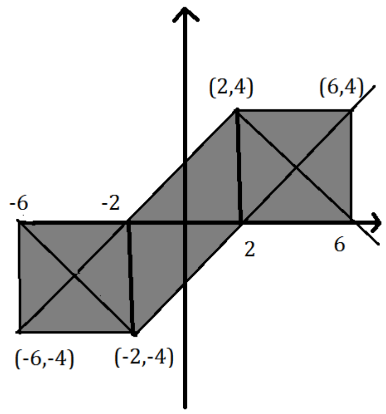
이다. 주어진 영역에서 $3\le x$거나 $-3\ge x$이므로 부등식 $|x-2|+|x+2|\le 12$를 $3\le x$에서 풀면 $3\le x\le 6$ 이다. 마찬가지로 부등식 $|x-2|+|x+2|\le 12$를 $-3\ge x$에서 풀면 $-6\le x\le -3$ 이다. 따라서 주어진 영역어서 구하는 부등식의 영역은 세 부등식

$$\begin{cases} y+|x-2|\ge 4 \\ y-|x+2|\le -4 \\ -6\le x\le -3,\ 3\le x\le 6 \end{cases}$$

을 만족하는 좌표평면의 점의 집합으로 아래 그림과 같다.



위 (ㄱ),(ㄴ),(ㄷ),(ㄹ)에서 구한 영역을 모두 합하여 구하는 부등식의 영역 D을 나타내면 아래와 같이 한변의 길이가 4인 정사각형 두 개와 밑변의 길이가 4이고 높이가 4인 평행사변형의 합집합이다.



따라서 구하는 영역의 넓이는 48이다.

[문제2] 함수 $f(x) = \ln(e^x + 1)$이며 $g(x) = x^2 - 2x + a$이다. (단, $\ln x$는 자연로그이며 a는 실수이다.) 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$에 대하여 아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) 합성함수 $h(x)$가 일대일 대응이 되고 $h'(x) \geq 0$가 되는 실수 x의 최대범위를 정하시오.
(2) 문제 (1)에서 정한 x의 범위에서 합성함수 $h(x)$의 최솟값이 1이라고 할 때 실수 a의 값을 구하시오.
(3) 문제 (1)에서 정한 x의 범위에서 합성함수 $h(x)$의 역함수를 $x = h^{-1}(y)$라고 하자. y의 값이 $\ln(1+e^a)$일 때, $\dfrac{dx}{dy}$의 값을 구하시오.

■ 출제의도

2차 다항함수와 지수함수 그리고 자연 로그함수를 이용하는 합성함수를 소재로 문항을 구성하였다. 주어진 합성함수의 미분 값을 구하는 능력과 일대일 대응이 되는 범위를 파악 할 수 있는지를 묻고, 증가함수의 성격을 이용하여 주어진 함수의 최솟값 문제를 해결할 수 있는지를 묻고자 한다. 또한 역함수의 미분 방법에 대한 이해와 지수와 로그함수와의 상관관계를 이해하는 능력을 평가한다.

■ 우수답안 및 해설

(1) 먼저 2차 다항식의 완전 제곱식을 이용하여 다음 수식을 구하자.

$$g(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + a - 1$$

여기에서 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 1$ 인 범위에서 $g(x)$는 일대일 대응이 된다. 자연로그함수가 일대일 대응이므로 $g(x)$가 일대일 대응이 될 때 $h(x) = (f \circ g)(x)$도 일대일 대응이 된다. 따라서 구하는 최대범위는 $x \leq 1$ 또는 $x \geq 1$ 중의 하나가 된다.

한편, 합성함수 미분에 대한 연쇄법칙을 사용하면 함수 $h(x)$의 도함수 $\dfrac{dh}{dx}$는 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dx} &= \frac{1}{e^{g(x)}+1} e^{g(x)} \frac{dg}{dx} \\ &= \frac{1}{e^{x^2-2x+a}+1} e^{x^2-2x+a} \cdot 2(x-1) \qquad (A)\end{aligned}$$

이때 $x \leq 1$ 와 $x \geq 1$ 중에 $\dfrac{dh}{dx} \geq 0$ 조건을 만족하는 최대범위는 $x \geq 1$ 이다.

(2) 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$는 아래와 같이 표현 된다.

$$(f \circ g)(x) = \ln\left(e^{g(x)} + 1\right)$$

자연로그함수가 증가함수이므로 $g(x)$가 최소일 때 $e^{g(x)}+1$이 최소이고 $(f \circ g)(x)$도 최소이다. (1)에서 정한 범위 $x \geq 1$에서 $g(x)$가 증가함수이고 $g(x)$는 $x=1$ 일 때 최솟값 $a-1$을 가지므로 합성함수 $h(x)$는 최솟값

$$h(1)=(f \circ g)(1)=f(a-1)=\ln(e^{a-1}+1)$$

을 갖는다. $h(x)$의 최솟값이 1이므로 구하는 실수 $a=1+\ln(e-1)$이다.

(3) $y=\ln(1+e^a)$가 될 때 $\ln(e^{x^2-2x+a}+1)=\ln(1+e^a)$이므로 (1)에서 구한 범위 $x \geq 1$에서 x의 값은 $x=2$이다.

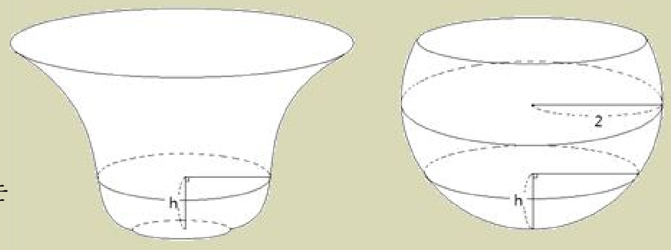
수식 (A)로부터 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{h'(x)}$$

$h'(2)=\dfrac{2e^a}{e^a+1}$ 이므로 구하는 값은 $\dfrac{e^a+1}{2e^a}$ (또는 $\dfrac{1}{2}(1+e^{-a})$) 이다.

[문제3] 아래 그림과 같이 높이가 3인 그릇이 두 개 있다. 왼쪽 그릇의 높이가 h인 지점에서 밑면에 평행하게 자른 단면은 반지름이 $\sqrt{\frac{1}{2}+2h-4h^2+4h^3}$ 인 원이다. 오른쪽 그릇은 반지름이 2인 구의 윗부분이 밑면에 평행하게 잘린 모양이다. [40점]

(1) 두 그릇에 담긴 물의 높이 $h=1$일 때,
 두 그릇에 담긴 물의 부피를 구하시오.
(2) 두 그릇에 높이가 같도록 물을 담을 때,
 각각의 그릇에 담긴 물의 부피가 같아지는 높이가 있음을 보이시오.



■ 출제의도

정적분의 활용으로 입체도형의 부피를 구하는 방법을 알고 있는 지를 측정하고자 하는 문제이다. 특히 단면이 원인 입체도형의 부피와 구의 일부분에 해당하는 입체도형의 부피를 계산할 수 있는지 묻고자 하였다. 또한 도함수를 활용하여 다항함수의 그래프를 그리고 방정식에 활용할 수 있는지 평가하고자 하였다.

■ 우수답안 및 해설

(1) 왼쪽 그릇의 높이 h인 지점에서 밑면에 평행하게 자른 단면은 반지름 $\sqrt{\frac{1}{2}+2h-4h^2+4h^3}$ 인 원이므로, 높이가 h인 지점까지 그릇의 부피는

$$V(h)=\int_0^h \pi\left(\frac{1}{2}+2x-4x^2+4x^3\right)dx=\pi h\left(\frac{1}{2}+h-\frac{4}{3}h^2+h^3\right)$$

이다. 따라서 $h=1$를 대입하면 왼쪽 그릇에 담긴 물의 부피는 $V(1)=\frac{7}{6}\pi$ 이다.

오른쪽 그릇은 반지름이 2인 구에서 윗부분이 1인 위치가 밑면에 평행하게 잘린 모양이므로, 높이가 h 인 지점까지 그릇의 부피는

$$W(h)=\int_{-2}^{h-2}\pi(4-x^2)\,dx=\pi\left(4h-\frac{1}{3}h^3+2h^2-4h\right)=\pi h^2\left(2-\frac{1}{3}h\right)$$

이다. 따라서 $h=1$를 대입하면 오른쪽 그릇에 담긴 물의 부피는 $W(1)=\frac{5}{3}\pi$ 이다.

(2) 함수 $f(h) = V(h) - W(h) = \pi h\left(\frac{1}{2} - h - h^2 + h^3\right)$이라 하자. 두 그릇에 담긴 물의 부피가 같아지는 높이 h, 즉 $V(h) = W(h)$를 만족하는 h가 0과 3사이에 존재한다는 것은

$$g(h) = \frac{1}{2} - h - h^2 + h^3 = 0$$

이 0과 3사이에서 근을 갖는다는 것과 같다.

$$g'(h) = -1 - 2h + 3h^2 = 0$$

이므로 $g(h)$는 $h = 1, -\frac{1}{3}$에서 극점을 갖는다. 극솟값이 $g(1) = -\frac{1}{2} < 0$이고 $g(3) = \frac{31}{2} > 0$이므로, $g(h)$는 1과 3사이에서 근을 갖는다. 따라서 $V(h) = W(h)$를 만족하는 h가 0과 3사이에 적어도 하나 존재한다.