<2019학년도 경희대학교 오프라인 모의논술고사>

출 제 개 요 (의학계-수학)

논제 I <수학>

수학 논제에서는 고등학교 수학 교육과정의 도형의 방정식 및 미분과 적분, 함수의 최대와 최소에 대한 문제를 출제하였다. 단편적인 수학 공식의 활용보다는 문제의 상황과 설정을 이해하는 능력, 주어진 상황을 수학적인 방법으로 설명할 수 있도록 적절한 변수를 도입하는 능력, 변수들 사이의 관계를 표현하는 능력, 그리고 이를 바탕으로 종합적이면서 합리적으로 문제를 해결하는 능력 등이 있는지에 대한 평가를 하고자 하였다.

[논제 I-1]에서는 삼각함수의 정의와 점과 점, 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 문제를 해결하기 위해 필요한 여러 선분의 길이를 하나의 변수를 이용해서 나타낼 수 있는지를 종합적으로 평가하고자 하였다. [논제 I-2]에서는 주어진 함수의 최댓값을 찾는 해법으로 도함수의 부호를 판정하여 함수의 증감을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 파악하고자 하였다. [논제 I-3]과 [논제 I-4]에서는 임의의 이차곡선의 두 접선이 한 점에서 만날 때, 이차곡선과 두 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이와 두 접점과 두 접점 사이의 이차곡선 위의 점이 이루는 삼각형의 최대 넓이와의 비가 항상 일정함을 보이는 문제를 다루고자 하였다. 우선 [논제 I-3]에서 고정된 두 개의 직선에 동시에 접하는 이차함수를 찾기 위해, 이차함수와 접선과의 관계에 대한 이해와 적절한 변수를 도입하여 이차함수를 표현할 수 있는지를 평가하고자 하였다. [논제 I-4]에서는 정적분의 개념을 활용하여 곡선과 직선들에 의해서 둘러싸인 영역에 대한 넓이와 주어진 조건의 삼각형의 넓이를 계산할 수 있는지에 대한 종합적 문제 해결 능력을 파악하고자 하였다.

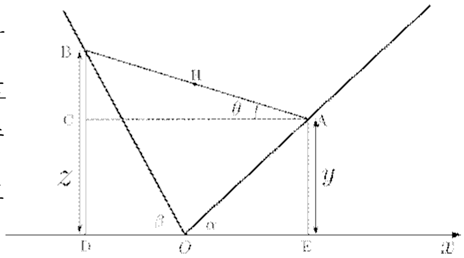
[제시문 출처]

제시문 [가]: 고등학교 수학 I, 조도연 외 16인, 경기도 교육청, 2016, p158.
제시문 [나]: 고등학교 수학 I, 조도연 외 16인, 경기도 교육청, 2016, p187.
제시문 [다]: 고등학교 미적분 I, 신항균 외 11인, 지학사, 2017, p93.
제시문 [라]: 고등학교 미적분 I, 신항균 외 11인, 지학사, 2017, p120.
제시문 [마]: 고등학교 미적분 I, 이강섭 외 14인, 미래엔, 2017, p178.
제시문 [바]: 고등학교 미적분 II, 신항균 외 11인, 지학사, 2016, p56)

2019학년도 오프라인 모의논술고사 예시답안

의학계 - 수학

[논제 I-1]



θ는 점 B가 점 O에 있을 때, $\theta=-\alpha$로 가장 작으며, 점 A가 점 O에 있을 때, $\theta=\beta$로 가장 크다. 따라서 <u>θ의 범위는 $-\alpha \leqq \theta \leqq \beta$이다</u>. 오른쪽 그림처럼 A와 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 E와 D라 하고, $y=\overline{\mathrm{AE}}$와 $z=\overline{\mathrm{BD}}$라 하자. 그러면 $\overline{\mathrm{OE}}=y\cot(\alpha)$이고 $\overline{\mathrm{OD}}=z\cot(\beta)$이기 때문에,

$\overline{\mathrm{AC}}=4\cos(\theta)=\overline{\mathrm{OE}}+\overline{\mathrm{OD}}=y\cot(\alpha)+z\cot(\beta)$이 된다. 이 식과 $z=y+4\sin(\theta)$로부터

$y=\dfrac{4\cos(\theta)-4\cot(\beta)\sin(\theta)}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$를 얻을 수 있다. 따라서 점 H로부터 x축과의 최단거리는

$$\underline{f(\theta)=\frac{y+z}{2}=4\cos(\theta)+2\frac{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}\sin(\theta)}$$

이 된다.

[논제 I-2]

$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$이고 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$이면, $f(\theta)=\dfrac{4\sqrt{3}\cos(\theta)+2(\sqrt{3}-1)\sin(\theta)}{\sqrt{3}+1}$

$f(\theta)$가 최대가 되는 θ를 찾기 위해 $f'(\theta)=0$의 해를 찾아야 한다. 따라서, 방정식

$$f'(\theta)=\frac{-4\sqrt{3}\sin(\theta)+2(\sqrt{3}-1)\cos(\theta)}{\sqrt{3}+1}=\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{3}+1}(-4\sqrt{3}\tan(\theta)+2(\sqrt{3}-1))=0$$

로부터 $\tan(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$을 만족하는 θ에서 극값을 갖는다는 것을 알 수 있다. $\tan(\theta)$는 증가함수이고 $-1=-\tan(\alpha)<\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}<\tan(\beta)=\sqrt{3}$이어서 $f'(\theta)=0$의 해 θ_0는 θ의 범위인

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$에 있게 된다. 또한 $f'(\theta)$는 $\theta=\theta_0$의 좌우에서 부호가 양에서 음으로 바뀌게 되어 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 최댓값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 그러므로 $f(\theta)$가 최대가 되는 $\theta=\theta_0$에서의 $\tan(\theta_0)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$이 된다. 따라서 선분 AB의 기울기는 $\underline{\tan(\pi-\theta_0)=-\tan(\theta_0)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$이다.

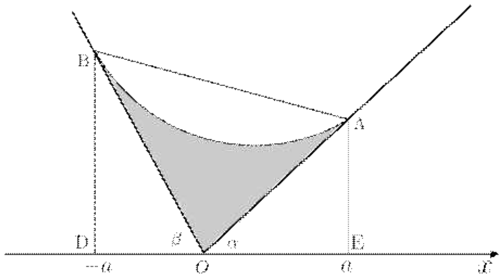
[논제 I-3]

$y=g(x)$와 ℓ_2와의 접점을 B라 하자. 선분 OA는 직선 $y=\tan(\alpha)x$ 위에 있고, 선분 OB는 직선 $y=-\tan(\beta)x$ 위에 있다. 접점 A의 x좌표를 a, 접점 B의 x좌표를 b라 하자. 그리고 이차함수 $y=g(x)$의 이차항의 계수를 c라 하자. 이때, $y=g(x)$는 $y=\tan(\alpha)x$와 $x=a$에서 접하므로, $g(x)-\tan(\alpha)x=c(x-a)^2$이 된다. 마찬가지로 $y=g(x)$는 $y=-\tan(\beta)x$와 $x=b$에서 접하므로,

$g(x)+\tan(\beta)x=c(x-b)^2$이 된다. 위의 두 식으로부터

$g(x)=c(x-a)^2+\tan(\alpha)x=c(x-b)^2-\tan(\beta)x$을 얻을 수가 있다. 이때, 양변의 계수를 비교하면, 일차항으로부터 $2ac-\tan(\alpha)=-2ac+\tan(\beta)$를 얻고, 상수항으로부터 $c(a^2-b^2)=0$을 얻을 수 있게 된다. 따라서 $b=-a$이고, $c=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{4a}$가 됨을 알 수 있다. 따라서 구하고자 하는 이차함수는 $g(x)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{4a}(x-a)^2+\tan(\alpha)x$이다.

[논제 I-4]



점 A와 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 E와 D라 하자. $y=g(x)$와 선분 OA와 선분 OB로 둘러싸인 영역은 오른쪽 그림에서 색칠된 영역이다. 이 영역의 넓이 S_1을 구하기 위해서는 $-a\leqq x\leqq a$에서의 $y=g(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이에서 삼각형 OAE와 삼각형 OBD의 넓이를 빼면 된다. 따라서

$$S_1=\int_{-a}^{a}\left(\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{4a}(x-a)^2+\tan(\alpha)x\right)dx-\frac{1}{2}a^2\tan(\alpha)-\frac{1}{2}a^2\tan(\beta)$$
$$=\frac{2}{3}(\tan(\alpha)+\tan(\beta))a^2-\frac{1}{2}(\tan(\alpha)+\tan(\beta))a^2=\frac{1}{6}(\tan(\alpha)+\tan(\beta))a^2$$

즉, $S_1=\dfrac{1}{6}(\tan(\alpha)+\tan(\beta))a^2$임을 알 수 있다.

한편, 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 되는 점 P는 선분 AB와 평행한 $y=g(x)$의 접선의 접점이다. 선분 AB의 기울기가 $\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{2}$이므로, 방정식

$g'(x)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{2a}(x-a)+\tan(\alpha)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{2}$를 풀어서 점 P의 x좌표가 $x=0$임을 알아낸다. 그러면 점 $\mathrm{P}(0,\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{4}a)$로부터 선분 AB를 지나는 직선 $(\tan(\alpha)-\tan(\beta))x-2y+\tan(\alpha)+\tan(\beta)=0$까지의 거리는 $h=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{2\sqrt{4+(\tan(\alpha)-\tan(\beta))^2}}a$이 된다. 삼각형 ABP는 선분 AB를 밑변으로 h를 높이로 하는 삼각형이므로, 삼각형 ABP의 최대 넓이는

$$S_2=\frac{1}{2}h\,\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{2\sqrt{4+(\tan(\alpha)-\tan(\beta))^2}}a\sqrt{4+(\tan(\alpha)-\tan(\beta))^2}\,a=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{4}a^2$$

이 된다. 따라서 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{3}{2}$임을 보일 수 있다.

논 술 채 점 기 준 표 (의학계-수학)

[논제 Ⅰ] 수학 (60점 만점)

[논제 I-1] (총 15점 = 5점 + 5점 +5점)

[5 점] θ의 범위 $-\alpha \leqq \theta \leqq \beta$.

[5 점] y와 z를 θ에 관한 함수 $y=\dfrac{4\cos(\theta)-4\cot(\beta)\sin(\theta)}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}$과 $z=y+4\sin(\theta)$으로 표현한다.

[5 점] $f(\theta)=4\cos(\theta)+2\dfrac{\cot(\alpha)-\cot(\beta)}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)}\sin(\theta)$

[논제 I-2] (총 10점 = 2점 + 3점 + 3점 + 2점)

[2 점] $f(\theta)$의 도함수 $f'(\theta)=\dfrac{-4\sqrt{3}\sin(\theta)+2(\sqrt{3}-1)\cos(\theta)}{\sqrt{3}+1}$를 구한다.

[3 점] $\tan(\theta)$가 증가함수임을 이용하여 함수 $f(\theta)$가 극값을 갖는 θ_0가 θ의 범위인 $-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$에

있음을 보인다.

[3 점] $\tan(\theta_0)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$임을 보인다.

[2 점] 기울기가 $-\tan(\theta_0)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$임을 보인다.

[논제 I-3] (총 15점 = 5점 + 5점 + 5점)

[5 점] 접점 B의 x좌표가 $-a$임을 보인다.

[5 점] 이차항의 계수가 $\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{4a}$임을 보인다.

[5 점] 구하고자 하는 이차함수가 $g(x)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{4a}(x-a)^2+\tan(\alpha)x$임을 보인다.

[논제 I-4] (총 20점 = 8점 + 8점 + 4점)

[8 점] $S_1=\dfrac{1}{6}(\tan(\alpha)+\tan(\beta))a^2$임을 보인다.

[8 점] $S_2=\dfrac{1}{4}(\tan(\alpha)+\tan(\beta))a^2$임을 보인다.

[4 점] $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{3}{2}$임을 보인다.