

2016학년도 대학수학능력시험 대비

2015학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

수학 A형 정답

1	⑤	2	①	3	②	4	⑤	5	②
6	③	7	④	8	⑤	9	③	10	⑤
11	④	12	①	13	④	14	③	15	②
16	④	17	①	18	③	19	②	20	③
21	①	22	17	23	99	24	252	25	502
26	25	27	20	28	15	29	30	30	184

해설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3 \times (3^{-1})^{-2} = 3 \times 3^2 = 27$$

2. [출제의도] 행렬의 연산법칙을 이용하여 두 행렬의 합과 실수배를 계산한다.

$$\begin{aligned} A+2B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 모든 성분의 합은 1이다.

[다른 풀이]

(행렬 $A+2B$ 의 모든 성분의 합)
= (행렬 A 의 모든 성분의 합)
+ $2 \times$ (행렬 B 의 모든 성분의 합)
= $3 + 2 \times (-1) = 1$

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{8-0}{\sqrt{1+0}} = 8$$

4. [출제의도] 그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성질을 이해하여 성분의 값을 구한다.

(행렬의 성분 중 1의 개수)
= $2 \times$ (그래프의 변의 개수)
= $2 \times 13 = 26$

5. [출제의도] 무한등비수열의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$a > b > 0$ 이므로 $0 < \frac{b}{a} < 1$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^n}{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{2}{1+0} = 2$$

6. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하고 주어진 항의 값을 구한다.

$a_n = a + (n-1)d$ ($a_1 = a$, d : 공차)에서

$a_4 = a + 3d = 9$, $a_7 = a + 6d = 21$ 이므로

위의 두 식을 연립하면 $d = 4$

$a_8 = a_4 + 4d$ 이고 $a_3 = a_4 - d$ 이므로

$$\begin{aligned} a_3 + a_8 &= 2a_4 + 3d \\ &= 2 \times 9 + 3 \times 4 = 30 \end{aligned}$$

[다른 풀이 1]

$d = 4$ 이므로 $a_4 = a + 12 = 9$, $a = -3$

$a_n = -3 + (n-1) \times 4 = 4n - 7$

$a_3 = 5$, $a_8 = 25$

$a_3 + a_8 = 30$

[다른 풀이 2]

a_4 는 제4항이고, a_7 은 제7항이다.

또, a_3 은 제3항이고, a_8 은 제8항이다.

$4+7=3+8$ 이므로 $a_4 + a_7 = a_3 + a_8$

따라서 $a_3 + a_8 = 9 + 21 = 30$

7. [출제의도] 지수법칙과 거듭제곱근을 이해하여 식의 값을 구한다.

$2^a = 3$ 이므로 이 식을 $3^b = \sqrt{2}$ 에 대입하면

$$(2^a)^b = \sqrt{2}$$

이 식을 정리하면 $2^{ab} = 2^{\frac{1}{2}}$ 이므로 $ab = \frac{1}{2}$

[다른 풀이 1]

로그의 정의에 의해

$$a = \log_2 3, \quad b = \log_3 \sqrt{2}$$

따라서 $ab = \log_2 3 \cdot \log_3 \sqrt{2} = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

[다른 풀이 2]

주어진 식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$a \log_3 2 = 1, \quad b = \frac{1}{2} \log_3 2$$

$$a = \frac{1}{\log_3 2}$$

따라서 $ab = \frac{1}{\log_3 2} \cdot \frac{1}{2} \log_3 2 = \frac{1}{2}$

8. [출제의도] 무한급수와 일반항의 관계를 이해하고 이를 활용하여 극한값을 구한다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3}{a_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \frac{5n}{n+1} + \frac{5n}{n+1} + 3}{a_n - \frac{5n}{n+1} + \frac{5n}{n+1} - 1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \\ &= \frac{0 + 5 + 3}{0 + 5 - 1} = 2 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$b_n = a_n - \frac{5n}{n+1}$ 이라 하자.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{5n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$a_n = b_n + \frac{5n}{n+1} \text{ 이고, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 5$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{5n}{n+1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 0 + 5 = 5 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3}{a_n - 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 3)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)} = \frac{5 + 3}{5 - 1} = 2$$

9. [출제의도] 행렬의 성질을 이해하여 역행렬의 성분의 합을 구한다.

$$A^2 - A = 3E, \quad A^2 - A - 2E = E$$

$$(A - 2E)(A + E) = E \text{ 이므로}$$

$$\text{역행렬의 정의에 의해 } (A - 2E)^{-1} = A + E$$

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -a \\ a & 13 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A + E = \begin{pmatrix} -12 & -a \\ a & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -a \\ a & 14 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 3이다.

[다른 풀이]

$$A^2 - A = 3E, \quad A(A - E) = 3E \text{ 이므로}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - E)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - 12 \cdot 13} \begin{pmatrix} 13 & a \\ -a & -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -13 & -a \\ a & 12 \end{pmatrix}$$

$$a^2 - 156 = -3, \quad a^2 = 153$$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -14 & -a \\ a & 11 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{a^2 - 14 \cdot 11} \begin{pmatrix} 11 & a \\ -a & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{153 - 154} \begin{pmatrix} 11 & a \\ -a & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & -a \\ a & 14 \end{pmatrix}$$

따라서 $A - 2E$ 의 역행렬의 모든 성분의 합은 3이다.

10. [출제의도] 지수함수의 그래프의 성질을 이해하고 내분점을 이용하여 좌표를 구한다.

점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 E라 하자.

점 A $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 이므로 점 D $(-1, 0)$ 이다.

y 축 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{DO} : \overline{OE} = 1 : 2$ 가 되어 점 E $(2, 0)$ 이다.

따라서 점 B의 y 좌표는 9이다.

[다른 풀이]

점 A $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 이고 점 B의 x 좌표를 b 라 놓으면 점 B $(b, 3^b)$ 이다.

선분 AB를 1:2로 내분하는 점 C $\left(\frac{b-2}{3}, \frac{3^b + \frac{2}{3}}{3}\right)$

에 대하여 점 C는 y 축 위에 있으므로

$$\frac{b-2}{3} = 0 \text{에서 } b = 2$$

따라서 점 B의 y 좌표는 $3^2 = 9$ 이다.

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하여 좌표를 구한다.

$$(\text{삼각형 BCD의 넓이}) = \frac{1}{2} \cdot (2p - p) \cdot \log_2 2p$$

$$= \frac{p}{2} \cdot \log_2 2p$$

$$(\text{삼각형 ACB의 넓이}) = \frac{1}{2} \cdot (2p - p) \cdot \log_2 p$$

$$= \frac{p}{2} \cdot \log_2 p$$

$$\frac{p}{2} \cdot \log_2 2p - \frac{p}{2} \cdot \log_2 p = 8 \text{ 이므로}$$

$$\frac{p}{2} (\log_2 2p - \log_2 p) = 8, \quad \frac{p}{2} \cdot \log_2 2 = 8$$

따라서 $p = 16$

[다른 풀이]

선분 CD를 삼각형 BCD와 삼각형 ACB의 높이라 하면, 그 길이는 $2p - p = p$ 로 같다. 그러므로 (삼각형 BCD와 삼각형 ACB 넓이의 차)

$$= \frac{p}{2} \times (\text{선분 BD와 선분 AC의 길이의 차})$$

$$= 8$$

삼각형 BCD의 밑변인 선분 BD의 길이는 $\log_2 2p$

이고, 삼각형 ACB의 밑변인 선분 AC의 길이는 $\log_2 p$ 이다.

그러므로 $\log_2 2p - \log_2 p = \log_2 2 = 1$
따라서 $p = 16$

12. [출제의도] 무한등비급수의 성질을 이해하여 귀납적으로 정의된 수열의 공비를 구한다.

$a_n a_{n+1} + a_{n+1} = k a_n^2 + k a_n$ 에서
 $(a_n + 1) a_{n+1} = k a_n (a_n + 1)$ 이고 $a_n + 1 \neq 0$ 이므로
양변을 $a_n + 1$ 로 나누면 $a_{n+1} = k a_n$
수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = k$, 공비가 k 인 등비수열
그러므로 $a_n = k^n$
수열 $\{a_n\}$ 의 공비 k 가 $0 < k < 1$ 이므로

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 $\frac{k}{1-k}$ 로 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} k^n = \frac{k}{1-k} = 5$$

따라서 $k = \frac{5}{6}$

13. [출제의도] 등차수열과 로그의 성질을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$\log 3$, $\log(3^t + 3)$, $\log 12$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\log(3^t + 3) = \frac{\log 12 + \log 3}{2} = \frac{\log 36}{2} = \log \sqrt{36}$$

$3^t + 3 = \sqrt{36} = 6$, $3^t = 3$
따라서 $t = 1$

14. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

$$f(n) = \log n = 1 + \alpha$$

조건에 의해 $1 \leq 2\alpha < 2$ 에서 $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$

$$1 + \frac{1}{2} \leq \log n < 2, \quad 10^{\frac{3}{2}} \leq n < 10^2$$

문제에서 $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$, $31 < 10\sqrt{10} < 32$
즉, $10\sqrt{10} = 31. \dots$ 이므로 $31. \dots \leq n < 10^2$
그런데 n 은 자연수이므로 $32 \leq n < 100$
따라서 자연수 n 의 개수는 68 이다.

15. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 실생활과 관련된 외적 문제를 해결한다.

마우스 커서가 아이콘 A 까지 이동하는 시간이 0.71 초이므로

$$0.71 = a + \frac{1}{10} \log_2 (D_A + 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

마우스 커서가 아이콘 B 까지 이동하는 시간이 0.66 초이므로

$$0.66 = a + \frac{1}{10} \log_2 (D_B + 1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서

$$0.05 = \frac{1}{10} \log_2 (D_A + 1) - \frac{1}{10} \log_2 (D_B + 1) \\ = \frac{1}{10} \log_2 \frac{D_A + 1}{D_B + 1}$$

$$\text{즉, } 0.5 = \log_2 \frac{D_A + 1}{D_B + 1}$$

$$\text{따라서 } \frac{D_A + 1}{D_B + 1} = 2^{0.5} = \sqrt{2}$$

16. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 연립방정식의 해를 추론한다.

$A(\alpha, \beta)$ 가 제1사분면의 점이므로 $\alpha > 0$, $\beta > 0$

조건에 의해 $\begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 5 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 은

$x = y = 0$ 이외의 해 $x = \alpha$, $y = \beta$ 를 가진다.

그러므로 $\begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 5 & 1-k \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않는다.

$$(-3-k)(1-k) - 5 = k^2 + 2k - 8 = (k-2)(k+4) = 0 \\ k = -4 \text{ 또는 } k = 2$$

i) $k = -4$ 인 경우

$$\text{연립방정식 } \begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 5 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 은}$$

$x + y = 0$ 과 같다.

그런데 α , β 는 모두 양의 실수이므로

$x = \alpha$, $y = \beta$ 는 $x + y = 0$ 을 만족시키지 않는다.

ii) $k = 2$ 인 경우

$$\text{연립방정식 } \begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 5 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 은}$$

$-5x + y = 0$ 과 같다.

α , β 는 모두 양의 실수이므로

$x = \alpha$, $y = \beta$ 는 $-5x + y = 0$ 을 만족시킨다.

따라서 $k = 2$

17. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = S_n \text{ 이라 하면}$$

$$a_n + b_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n + n^2 b_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n(n+1)}$$

$$= -1$$

또, 조건에 의해 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n = 2$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n + n^2 b_n - n^2 b_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 a_n + n^2 b_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n$$

$$= -3$$

18. [출제의도] 비례식의 성질과 로그함수의 성질을 활용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.

직선이 y 축과 만나는 점을 D 라 하면

두 곡선 $y = 2^x$ 과 $y = \log_2 x$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 C (a , 0) 이라 하면 점 D (0, a) 이고, $\overline{BC} = \overline{AD}$

조건에 의해 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$ 에서

$$\triangle OBC = \frac{1}{5} \triangle OCD = \frac{1}{10} a^2 = 40 \text{ 이므로 } a = 20$$

점 A 는 직선 $y = -x + a$ 위의 점이다.

따라서 $p + q = a = 20$

[다른 풀이]

두 곡선 $y = 2^x$ 과 $y = \log_2 x$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 점 A 와 점 B 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 점 A (p , q) 이므로 점 B (q , p) 이고, 점 C (a , 0) 이다.

조건에 의해 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$

점 B 는 선분 AC 를 3 : 1 로 내분하는 점이므로

$$q = \frac{3a+p}{4}, \quad p = \frac{q}{4} \text{ 에서 } a = 5p, \quad q = 4p$$

또, 삼각형 OBC 의 넓이가 40 이므로

$$\frac{1}{2} ap = \frac{5}{2} p^2 = 40$$

$p^2 = 16$ 에서 $p = 4$ 이므로 $a = 20$

($p < 0$ 인 경우에는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.)

점 A 는 직선 $y = -x + a$ 위의 점이다.

따라서 $p + q = a = 20$

19. [출제의도] 지수함수의 성질과 비례관계를 활용하여 미지수의 값 구하는 문제를 해결한다.

$$a^{f(t)} = t \text{ 이므로 } f(t) = \log_a t$$

$$b^{g(t)} = t \text{ 이므로 } g(t) = \log_b t$$

$$2f(a) = 3g(a) \text{ 이므로 } 2\log_a a = 3\log_b a \text{ 에서}$$

$$\log_b a = \frac{2}{3} \quad \text{즉, } \log_a b = \frac{3}{2}$$

$$f(c) = g(27)$$

$$= \log_b 27 = \frac{\log_a 27}{\log_a b} = \frac{2}{3} \log_a 27$$

$$= \log_a 27^{\frac{2}{3}} = \log_a 9$$

따라서 $c = 9$

20. [출제의도] 주어진 조건을 활용하여 행렬과 관련된 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. $A^2 + AB = 2E$ 에서 $\frac{1}{2}A(A+B) = E$ 이므로 A 의

역행렬은 존재하고 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+B)$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 A 의 역행렬은 존재하고 역행렬의 정의에 의해

$$\frac{1}{2}A(A+B) = \frac{1}{2}(A+B)A = E$$

$$A(A+B) = (A+B)A$$

$$A^2 + AB = A^2 + BA$$

$$AB = BA$$

A 의 역행렬이 존재하므로 $BA \neq O$

즉, $BA \neq -BA$

그러므로 $AB \neq -BA$ (거짓)

ㄷ. $A^2 - 2A = B^2 + 2B$, $A^2 - B^2 = 2(A+B)$

$$AB = BA \text{ 이므로 } A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

ㄱ의 풀이에서 $\frac{1}{2}A(A+B) = E$ 이므로

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{2}A$$

$(A+B)(A-B) = 2(A+B)$ 의 양변에

$(A+B)$ 의 역행렬 $\frac{1}{2}A$ 를 곱하면

$$A - B = 2E, \quad A = B + 2E$$

$A^2 + AB = 2E$ 에 $A = B + 2E$ 를 대입하면

$$2E = (B + 2E)^2 + (B + 2E)B$$

$$= 2B^2 + 6B + 4E$$

그러므로 $B^2 = -3B - E$

$$= -3(A - 2E) - E$$

$$= -3A + 5E \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ은 다음과 같이 확인할 수도 있다.

$$A^2 = 2E - AB = B^2 + 2B + 2A$$

$$B^2 + 2B + 2A + AB = 2E$$

$$(A+B)(B+2E) = 2E$$

$$\frac{1}{2}(B+2E) = (A+B)^{-1}$$

ㄱ의 풀이에서 $\frac{1}{2}A(A+B) = E$ 이므로

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{2}A$$

즉, $A = B + 2E$

$A^2 + AB = 2E$ 에 $B = A - 2E$ 를 대입하면

$$A^2 + A(A - 2E) = 2E$$

$$2A^2 - 2A = 2E$$

$$A^2 = A + E$$

그러므로 $B^2 = (A - 2E)^2$

$$= A^2 - 4A + 4E$$

$$= (A + E) - 4A + 4E$$

$$= -3A + 5E$$

21. [출제의도] 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을

구한다.

$1 \leq n \leq 15$ 를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로 소인 자연수 8개

$16 \leq n \leq 30$ 을 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로 소인 자연수 8개

\vdots

$15(k-1)+1 \leq n \leq 15k$ 를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개 ($k=1, 2, 3, \dots$)

a_{16} 은 $16 \leq n \leq 30$ 을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중 가장 큰 수이다.

$\sum_{n=1}^{16} a_n$ 은 1부터 30까지 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이다.

1부터 30까지 자연수 중에는 10개의 3의 배수, 6개의 5의 배수, 2개의 15의 배수가 있다.

따라서
$$\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{30} n - \sum_{n=1}^{10} 3n - \sum_{n=1}^6 5n + \sum_{n=1}^2 15n = 240$$

[다른 풀이]

$a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=7, a_5=8, a_6=11, a_7=13, a_8=14$ 이고

$k(k=1, 2, 3, \dots, 14)$ 가 15와 서로소이면 $15+k$ 도 15와 서로소이므로

$a_9=a_1+15, a_{10}=a_2+15, \dots, a_{16}=a_8+15$

$$\sum_{n=1}^8 a_n = 1+2+4+7+8+11+13+14 = 60$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{16} a_n &= \sum_{n=1}^8 a_n + \sum_{n=9}^{16} a_n \\ &= 2 \sum_{n=1}^8 a_n + 15 \times 8 \\ &= 2 \times 60 + 120 \\ &= 240 \end{aligned}$$

22. [출제의도] 연립방정식의 성질을 이용하여 행렬의 성분을 계산한다.

연립방정식을 전개하면

$$\begin{cases} ax + y = 8 \\ -x + by = 9 \end{cases}$$

해 $x=1, y=1$ 을 위 식에 대입하면

$$\begin{cases} a+1=8 \\ -1+b=9 \end{cases}$$

이므로 $a=7, b=10$

따라서 $a+b=17$

23. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 제50항의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned} a_{50} &= S_{50} - S_{49} = 50^2 - 49^2 \\ &= (50-49)(50+49) = 99 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ &= n^2 - (n-1)^2 \\ &= 2n-1 \end{aligned}$$

따라서 $a_{50}=99$

24. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수를 구한다.

$\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ 이 자연수가 되기 위해서는 a 는 어떤 자연수의 제곱 꼴이고 b 는 세제곱 꼴이다.

$5^2 < 30 \leq a \leq 40 < 7^2$ 이므로 $a=6^2$

또, $5^3 < 150 = 5^2 \times 6 < 6^3$ 이고

$6^3 < 294 = 7^2 \times 6 < 7^3$

이므로 $5 < \sqrt[3]{b} < 7, b=6^3$

따라서 $a+b=36+216=252$

25. [출제의도] 양의 약수와 등비수열의 합을 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

2^{n-1} 의 모든 양의 약수 : $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$

$$a_n = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^8 a_n &= \sum_{n=1}^8 (2^n - 1) \\ &= \sum_{n=1}^8 2^n - \sum_{n=1}^8 1 \\ &= \frac{2 \times (2^8 - 1)}{2 - 1} - 8 \\ &= 2^9 - 2 - 8 = 502 \end{aligned}$$

26. [출제의도] 상용로그의 성질을 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 합을 구한다.

4^m 이 8자리의 정수이기 때문에 4^m 의 상용로그의 지표는 7이다. 따라서

$7 \leq \log 4^m < 8$

$7 \leq m \log 4 < 8$

$$\frac{7}{\log 4} \leq m < \frac{8}{\log 4}$$

$$\frac{7}{2 \log 2} \leq m < \frac{8}{2 \log 2}$$

$$\frac{7}{0.602} \leq m < \frac{4}{0.301}$$

$11.6 \dots \leq m < 13.2 \dots$ 이므로 $m=12, 13$

따라서 $12+13=25$

27. [출제의도] 행렬의 거듭제곱과 \sum 의 성질을 활용하여 로그와 관련된 문제를 해결한다.

행렬 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$
이므로

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
이 되어

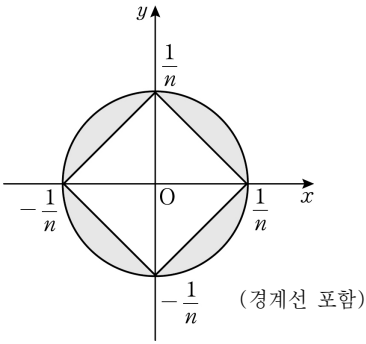
$(1, 1)$ 성분과 $(2, 2)$ 성분의 곱 $p_n = 3^n \times 2^n = 6^n$

$$\begin{aligned} \log_{36} p_1 p_2 \dots p_n &= \log_{36} 6^1 \times 6^2 \times \dots \times 6^n \\ &= \log_{36} 6^{1+2+\dots+n} \\ &= \log_6 6^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} = 105 \end{aligned}$$

이므로 $n(n+1) = 420 = 20 \times 21$

따라서 $n=20$

28. [출제의도] 연립부등식의 영역으로 주어진 도형과 관련된 무한급수의 문제를 해결한다.



$$S_n = \pi \left(\frac{1}{n} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot 2 = \frac{\pi-2}{n^2}$$
이므로

$$S_{n+2} = \frac{\pi-2}{(n+2)^2}$$

$$\frac{20}{\pi-2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{S_n S_{n+2}}$$

$$= \frac{20}{\pi-2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi-2}{n^2} \cdot \frac{\pi-2}{(n+2)^2}}$$

$$= 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$= 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

3

$$\begin{aligned} &= 10 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 10 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 10 \times \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= 15 \end{aligned}$$

29. [출제의도] 로그의 정의와 이차함수의 성질을 활용하여 자연수의 개수 구하는 문제를 해결한다.

$f(x) = -x^2 + ax + 4$ 라 하면

로그의 진수 조건에 의해 $f(x) > 0$

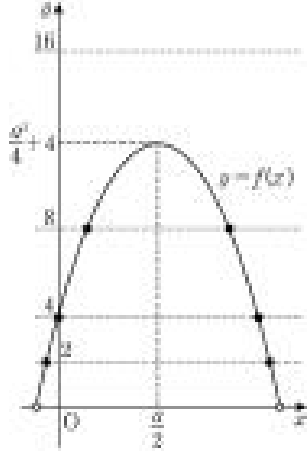
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + ax + 4 \\ &= -\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right) + 4 \\ &= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 4 \end{aligned}$$

$\log_2(-x^2+ax+4)$ 의 값이 자연수가 되는 실수 x 의 개수가 6이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 $y=2^1, y=2^2, y=2^3$ 과 각각 2개의 점에서 만나고 $y=2^n$ ($n \geq 4$)와는 만나지 않는다.

즉, $2^3 < \frac{a^2}{4} + 4 < 2^4$

$16 < a^2 < 48$ 이고, a 가 자연수이므로 $a=5, 6$

따라서 $5 \times 6 = 30$



30. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을 구한다.

조건 (가)에서 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A 에 속하지 않는 원소는 $31-a_i$ ($1 \leq i \leq 15$)이다.

그러므로 $\sum_{i=1}^{15} a_i^2$ 과 $\sum_{i=1}^{15} (31-a_i)^2$ 의 합은 집합 U 의

모든 원소의 제곱의 합과 같다.

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2 + \sum_{i=1}^{15} (31-a_i)^2 = \sum_{i=1}^{30} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2 + \sum_{i=1}^{15} 31^2 - 62 \sum_{i=1}^{15} a_i + \sum_{i=1}^{15} a_i^2 = \frac{30 \times 31 \times 61}{6}$$

조건 (나)에 의해

$$2 \sum_{i=1}^{15} a_i^2 + 15 \times 31^2 - 62 \times 264 = 5 \times 31 \times 61$$

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2 = \frac{1}{2} (5 \times 31 \times 61 - 15 \times 31^2 + 62 \times 264)$$

$$= \frac{31}{2} (5 \times 61 - 15 \times 31 + 2 \times 264)$$

$$= \frac{31}{2} (-5 \times 32 + 2 \times 264)$$

$$= 31 \times 184$$

따라서 $\frac{1}{31} \sum_{i=1}^{15} a_i^2 = 184$

[참고]

두 원소의 합이 31이 되는 쌍은 $(1, 30), (2, 29), \dots, (15, 16)$ 이므로 집합 A 는 각 순서쌍에서 원소를 하나씩 택하여 얻을 수 있다. 이와 같은 방법으로 찾은 집합 A 의 여러 예 중 하나는 다음과 같다.

$\{5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 23, 25, 27, 28, 29, 30\}$