2011학년도 9월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

수리 영역

"나"형 정답

1	⑤	2	①	3	③	4	②	5	①
6	③	7	④	8	⑤	9	⑤	10	④
11	④	12	③	13	②	14	⑤	15	①
16	⑤	17	②	18	⑤	19	④	20	⑤
21	③	22	14	23	16	24	30	25	4
26	15	27	47	28	3	29	30	30	6

해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_4\sqrt{8}-\log_{\frac{1}{2}}4=\frac{3}{4}\log_2 2+2\log_2 2=\frac{11}{4}$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$2X=3B-A$

$=3\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\14&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}1&-2\\7&0\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{243}\times\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{5}{3}}\times 3^{-\frac{2}{3}}=3$

4. [출제의도] 주어진 행렬의 성질 이해하기

이차방정식 $x^2-2(i+j)x+9=0$의 판별식이

$D/4=(i+j)^2-9$ 이므로

(ⅰ) (1, 1)성분 $D/4=-5<0$, $a_{11}=0$

(ⅱ) (1, 2)성분 $D/4=0$, $a_{12}=1$

(ⅲ) (2, 1)성분 $D/4=0$, $a_{21}=1$

(ⅳ) (2, 2)성분 $D/4=7>0$, $a_{22}=2$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$

5. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

그래프의 연결 상태를 나타내는 행렬은

$$\begin{array}{c} \\ A\\B\\C\\D\\E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}A&B&C&D&E\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

이다. 따라서 행렬의 모든 성분의 합은 16 이다.

6. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 이면 $AB=BA$ 이므로

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&x\\2y&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x\\0&2x\end{pmatrix}$ …… ①

$BA=\begin{pmatrix}0&x\\2y&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&0\\2y-6&0\end{pmatrix}$ …… ②

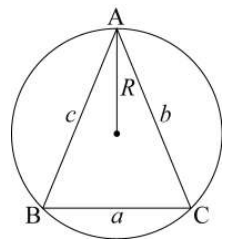
①, ②의 각 성분을 비교하면

$x=0$, $y=3$ $\therefore\ x+y=3$

7. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$$\frac{8^a+8^{-a}}{2^a+2^{-a}}=\frac{(2^a+2^{-a})(4^a-1+4^{-a})}{2^a+2^{-a}}$$
$$=(2^a+2^{-a})^2-3$$
$$=6$$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학내적문제 해결하기



그림과 같이 △ABC의 외접원의 반지름을 R라 하자. $\overline{AB}=\overline{AC}$ 이므로 $b=c$ 이다.

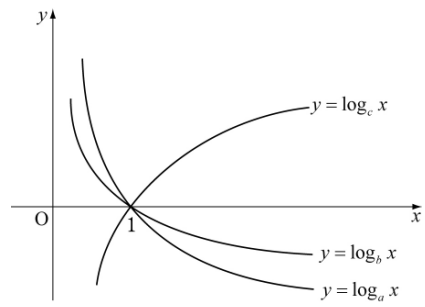
$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$,

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a}{2c}$

$\log_2\sin A-\log_2\cos B-\log_2\sin C$

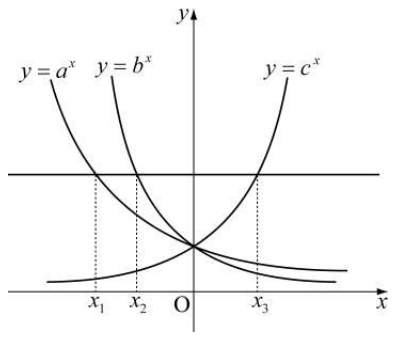
$=\log_2\frac{\sin A}{\cos B\sin C}=\log_2\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{a}{2c}\times\frac{c}{2R}}=\log_2 2=1$

9. [출제의도] 로그함수 이해하기



그림과 같이 서로 다른 양수 a, b, c 에 대하여 $0<b<a<1<c$ 이다.

주어진 조건에서 $a^{x_1}=b^{x_2}=c^{x_3}>1$ 이므로



$x_1<x_2<0$, $x_3>0$ 이다. $\therefore\ x_3>x_2>x_1$

10. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

그래프의 연결 상태를 나타낸 행렬을 P라 하자.

$P=\begin{pmatrix}0&\square&\square&0\\1&0&1&1\\1&1&0&\square\\0&\square&0&0\end{pmatrix}$ 에 대하여

$a_{ij}=a_{ji}\,(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 이므로

$P=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ 이다.

$P^2=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&1&0\\1&1&2&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$ 이므로

꼭짓점 B에서 변을 두 번 거쳐 꼭짓점 B로 되돌아오는 방법의 수는 P^2의 (2, 2)성분과 같으므로 3이다.

11. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 수학외적문제 해결하기

A 학교 학생 중 배드민턴을 배우는 학생 수는

$0.3\times300+0.4\times250$

$QP=\begin{pmatrix}0.7&0.6\\0.3&0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300&200\\250&150\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0.7\times300+0.6\times250&0.7\times200+0.6\times150\\0.3\times300+0.4\times250&0.3\times200+0.4\times150\end{pmatrix}$

$\therefore$ 행렬 QP 의 (2, 1) 성분이다.

12. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학내적문제 해결하기

$\overline{AB}=\overline{AQ}$ 이므로 $2\overline{AP}=\overline{BQ}$ 이고,

$\overline{AP}=\log_2 3$ 이므로 $\overline{BQ}=2\log_2 3$ 이다.

점 Q의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면

$2\log_2 3=\log_2 a+1$

그러므로 $a=\frac{9}{2}$

△ABQ의 넓이는 $3\log_2 3$이다.

13. [출제의도] 상용로그의 지표의 성질 이해하기

$233\le\log A^{100}<234$

$2.33\le\log A<2.34$

$46.6\le 20\log A<46.8$

$\log A^{20}$의 지표가 46이므로 A^{20}은 47자리의 수이다.

14. [출제의도] 주어진 지수의 성질 추론하기

ㄱ. $3\uparrow 2=3^3=27$ (참)

ㄴ. $a\uparrow(n+1)=\underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a^{a}}}}}}_{a가\ (n+1)개}=a^{\underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a^{a}}}}}}_{a가\ n개}}=a^{(a\uparrow n)}$

(참)

ㄷ. $\log(4\uparrow 3)=\log 4^{4^4}=512\log 2=154.112$

따라서 $4\uparrow 3$은 155 자리 자연수이다.(참)

$\therefore$ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학외적 문제 해결하기

n개월 후의 이 제품의 가격은 $10^6\times(0.8)^{\frac{n}{5}}$(원)

가격이 50만 원 이하가 되는 시기를 계산하면

$10^6\times(0.8)^{\frac{n}{5}}\le 5\times10^5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 2+\frac{n}{5}\log 0.8\le 0$

$n\ge 15.5\cdots$

따라서 최소한 16개월이 지나야 한다.

16. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ 라 두면

$AX = XA$ 이므로
$bz = \boxed{cy}$, $(a-d)y = b(x-w)$,
$(a-d)z = c(x-w)$ 이다.
(ⅰ) $a-d=0$ 인 경우
$A \neq kE$ 에서 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이므로
$x = w$ 이다.

㉠ $b \neq 0$ 이면 $z = \dfrac{\boxed{cy}}{b}$ 이므로

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} = \boxed{\frac{y}{b}} A + \left(x - \frac{a}{b}y\right)E$$

㉡ $c \neq 0$ 이면 $y = \dfrac{bz}{c}$ 이므로

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} = \frac{z}{c}A + \left(x - \frac{a}{c}z\right)E$$

(ⅱ) $a-d \neq 0$인 경우
$y = \dfrac{b(x-w)}{a-d}$, $z = \dfrac{c(x-w)}{a-d}$ 이므로

$X = \dfrac{x-w}{a-d}A + \boxed{\dfrac{aw-dx}{a-d}}E$ 이다.

(ⅰ)과 (ⅱ)에 의해 이차정사각행렬 X 는
$X = mA + nE$ 형태로 나타낼 수 있다.

17. [출제의도] 역행렬의 성질 이해하기
$(A+E)(2A-E) = E$
$2A^2 + A - 2E = 0$
$A(2A+E) = 2E$
$\therefore (2A+E)^{-1} = \dfrac{1}{2}A$

18. [출제의도] 로그를 이용하여 주어진 집합의 성질 추론하기
ㄱ. $A_2 = \{x \mid \log_2 x$가 유리수,
$2 \le x \le 100$ 인 자연수 $\}$
$= \{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6\}$
이므로 $n(A_2) = 6$ (참)
ㄴ. $n(A_3) = n(A_9) = n(A_{27}) = n(A_{81}) = 4$ 이므로
$n(A_3) + n(A_9) + n(A_{27}) + n(A_{81}) = 16$ (참)
ㄷ. $x \in A_m \cap A_n$ 에 대하여
$x = m^p = n^q$ (p, q는 양의 유리수)
$y \in A_m$이면 $y = m^r = x^{\frac{r}{p}} = n^{\frac{qr}{p}}$ (r는 양의 유리수) 이므로 $y \in A_n$ 이다. 즉, $A_m \subset A_n$
같은 방법으로 $A_n \subset A_m$ 이므로 $A_m = A_n$ (참)
$\therefore$ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학외적 문제 해결하기
$v_1 = k\rho g^{-0.5} A_1^{1.25}$ …… ①
$5v_1 = k\rho g^{-0.5} A_2^{1.25}$ …… ②
②÷①을 하면 $5 = \left(\dfrac{A_2}{A_1}\right)^{1.25}$ 이다.
양변에 상용로그를 취하면
$\log 5 = 1.25 \log \dfrac{A_2}{A_1}$ 이므로
$\log \dfrac{A_2}{A_1} = 0.56 = \log 3.63$ $\therefore \dfrac{A_2}{A_1} = 3.63$

20. [출제의도] 역행렬의 정의를 이용하여 행렬의 성질 추론하기
ㄱ. $A(BC) = E$ 에서 $A^{-1} = BC$ (참)
ㄴ. $A^{-1}(ABC)A = A^{-1}A = E$에서 $BCA = E$
$C(ABC)C^{-1} = CC^{-1} = E$에서 $CAB = E$
따라서 $BCA = CAB$ (참)
ㄷ. $B(CA) = E$ 에서 $B^{-1} = CA$ (참)
$\therefore$ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 지수부등식을 이용하여 수학내적문제 해결하기
$A = \left\{x \,\middle|\, \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2}\right\} = \{x \mid x+2 > x^2\}$
$= \{x \mid -1 < x < 2\}$
$B = \{x \mid 2^{|x-2|} \le 2^a\} = \{x \mid |x-2| \le a\}$
$= \{x \mid 2-a \le x \le 2+a\}$
$A \cap B = A$ 이므로 $A \subset B$ 이다.
그러므로 $2-a \le -1$ 이고 $2 \le 2+a$이다.
즉, $3 \le a$이다. $\therefore$ a의 최솟값은 3이다.

22. [출제의도] 행렬 계산하기
$A^2 + AB = A(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
$A^2 + AB$의 모든 성분의 합은 14이다.

23. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기
$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -a-1 \\ -a+1 & a \end{pmatrix}$ 이므로
$A + A^{-1} = 2aE$
양변을 제곱하여 정리하면
$A^2 + (A^{-1})^2 = (4a^2 - 2)E$
모든 성분의 합이 124 이므로 $2(4a^2-2) = 124$
$\therefore a^2 = 16$

24. [출제의도] 로그부등식을 이용하여 수학내적문제 해결하기
이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - \log_2 a$ 의
그래프의 대칭축은 $x = 2$ 이다.
방정식 $f(x) = 0$ 이 $4 < x < 5$ 에서 한 개의 실근을 가지려면 $f(4) < 0$, $f(5) > 0$ 이어야 한다.
$f(4) = -\log_2 a < 0$
$a > 1$ …… ①
$f(5) = 5 - \log_2 a > 0$
$0 < a < 32$ …… ②
①, ②를 동시에 만족하는 a 의 범위는
$1 < a < 32$
$\therefore$ 자연수 a 의 개수는 30(개)

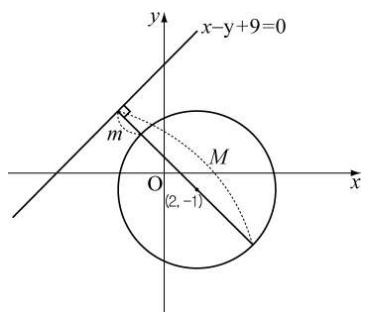
25. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학내적문제 해결하기
점 C 의 좌표를 $(a,\ 0)$ 라 하면
$\mathrm{A}(a, \log_3 a)$, $\mathrm{B}(9a, \log_3 9a)$, $\mathrm{D}(9a,\ 0)$
이고 $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 길이는 $8a$ 이다.
직선 AB의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} = \frac{\log_3 9a - \log_3 a}{9a - a} = \frac{2}{8a} = \frac{1}{4a}$$

따라서 $a = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $8a = 4$ $\therefore$ $\overline{\mathrm{CD}}$ 의 길이는 4

26. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기
$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$를 정리하면
$\begin{pmatrix} 2-k & -1 \\ 3-2k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이다.
연립일차방정식의 해 중에서 $x - y + 5 = 0$ 을 만족하는 해가 존재하려면 $x = 0, y = 0$ 이외의 해를 가져야 하므로 $(2-k)\times 1 - (-1)\times(3-2k) = 0$
따라서 $k = \dfrac{5}{3}$ $\therefore 9k = 15$

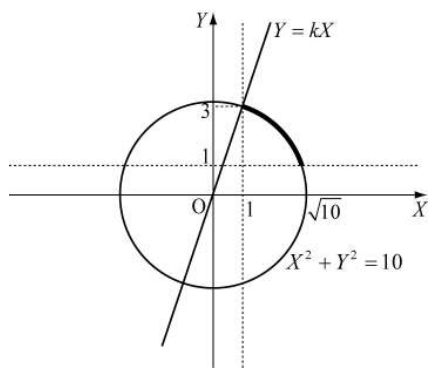
27. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 수학내적문제 해결하기
$A^2 = \begin{pmatrix} (x-2)^2 + (y+1)^2 & 0 \\ 0 & (x-2)^2 + (y+1)^2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$
이므로 점 $(x,\ y)$는 원 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ 위의 점이다.



원의 중심$(2,\ -1)$에서 직선 $x - y + 9 = 0$까지의 거리는 $\dfrac{12}{\sqrt{1^2+1^2}} = 6\sqrt{2}$ 이므로
$m = 6\sqrt{2} - 5$, $M = 6\sqrt{2} + 5$이다.
따라서 $mM = (6\sqrt{2}-5)(6\sqrt{2}+5) = 47$이다.
$\therefore mM = 47$

28. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자. $A + A^{-1} = E$의 양변에 A를 곱하면 $A^2 - A + E = O$ 이다.
양변에 $A + E$ 을 곱해서 정리하면 $A^3 = -E$
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 의 양변에 A^2 을 곱하면
$-E\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은 3 이다.

29. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 수학내적문제 해결하기
$\log_3 x = X$, $\log_3 y = Y$ 라 하면,
주어진 식은 $X^2 + Y^2 = 10$이고 $X \ge 1$, $Y \ge 1$
이때, 이를 만족하는 점 (X, Y)를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



한편, $\log_x y = k$ 라 두면 $Y = kX$ 이다.
여기서 k는 원점을 지나는 직선의 기울기이므로 $(1,\ 3)$을 지날 때, 최대가 된다.
$\log_3 x = X = 1$, $\log_3 y = Y = 3$
$x = 3 = \alpha$, $y = 27 = \beta$

$\therefore\ \alpha+\beta=30$

30. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 수학내적문제 해결하기

$\log x=2+\alpha,\ \log y=2+\beta$

$(0\le\alpha<1,\ 0\le\beta<1)$라 하자.

(가)에서 $\log x+\log y=4+(\alpha+\beta)$의 값이 정수이므로 $\alpha+\beta=0$ 또는 $\alpha+\beta=1$

$\therefore\ \alpha=\beta=0$ 또는 $\beta=1-\alpha$ …… ①

(나)에서 $\log x-\log y=\alpha-\beta=0.4$ …… ②

①, ②에 의해 $\alpha=0.7,\ \beta=0.3$이다.

$\log x=2.7$에서 $\log 500<\log x<\log 600$이므로 x의 최고자리의 숫자는 5이다. $\therefore\ a=5$

$\log y=2.3$에서 $\log 100<\log y<\log 200$이므로 y의 최고자리의 숫자는 1이다. $\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=6$