이 줄 위에 답안 작성 시 무효 처리됨

문제 2번 (반드시 해당문제와 일치하여야 함)

1. $f(2) = 1\times(-1)\times(-3)\cdots(-2015) > 0$.

$\ln|f(x)| = \ln|x-1| + \ln|x-3| + \cdots \ln|x-2017|$

↓미분

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} + \cdots + \frac{1}{x-2017} \quad (\text{단 } x \neq 2n+1,\ (n=1,\cdots 1008))$$

$x=2$ 대입.

$$\frac{f'(2)}{f(2)} = 1 - 1 - \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{2015}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2015}\right) < 0$$

$\Rightarrow f'(2) \neq 0$.

2. i) $f(x) \neq 0$ 일때

$\frac{f'(x)}{f(x)}$ 를 미분하면

$$\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-3)^2} - \cdots - \frac{1}{(x-2017)^2}$$

$$= -\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} + \cdots \frac{1}{(x-2017)^2}\right)$$

이때 $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} + \cdots \frac{1}{(x-2017)^2}$ 은 항상 양수.

즉 $\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2} < 0$.

$(f(x))^2 > 0$ 이므로

$f''(x)f(x) - (f'(x))^2 < 0$

ii) $f(x) = 0$ 일때

항상 $f'(x) \neq 0$

즉, $(f'(x))^2 > 0$

$\Rightarrow f(x)f''(x) < (f'(x))^2$

3. $(g(x))^3 - 1 = P_1(x)P_2(x)\cdots P_n(x)$

$\Rightarrow -1 = P_1(x)P_2(x)\times\cdots P_n(x) \quad \cdots ①$

이때 $P_1(x), P_2(x), \cdots, P_n(x)$ 모두 계수가 정수로만 이루어져 있다

즉 x도 정수이기에 $P_1(x), P_2(x), \cdots P_n(x)$ 모두 정수일수 밖에 없다.

따라서 ① 식이 만족하기위해서는

$P_1(x), P_2(x) \cdots P_n(x)$가 모두 1이나 -1이어야 하는데

이때 n개를 -1은 홀수개 만큼만 있어야한다.

$\{g(x)\}^3 - 1 = P_1(x)\cdots P_n(x)$ 를 미분해보면

$$3(g(x))^2 \times g'(x) = P_1'(x)P_2(x)\cdots P_n(x) + P_1(x)P_2'(x)\cdots P_n(x)$$
$$+ \cdots + P_1(x)P_2(x)\cdots P_n'(x)$$

$x=\alpha$ 를 대입하면

$$P_1'(\alpha)P_2(\alpha)\cdots P_n(\alpha) + P_1(\alpha)P_2'(\alpha)\times\cdots P_n(\alpha)$$
$$+ \cdots + P_1(\alpha)P_2(\alpha)\cdots P_n'(\alpha) = 0 \quad \cdots ②$$

$h(x) = (P_1(\alpha))^2 + (P_2(x))^2 + \cdots (P_n(\alpha))^2 - n$

$= n - n = 0$

$(\because P_k(\alpha) = 1 \text{ or } -1 \Rightarrow (P_k(\alpha))^2 = 1$

$(k = 1, 2, \cdots n))$

$h'(x) = 2P_1(x)P_1'(x) + 2P_2(x)P_2'(x) + \cdots + 2P_n(x)P_n'(x)$

$h'(\alpha) = 2P_1(\alpha)P_1'(\alpha) + 2P_2(\alpha)\times P_2'(\alpha) + \cdots + 2P_n(\alpha)P_n'(\alpha)$

①과 ② 종하면

$$0 = P_1(\alpha)P_1'(\alpha)\times(P_2(\alpha))^2\times\cdots(P_n(\alpha))^2 + (P_1(\alpha))^2P_2(\alpha)P_2'(\alpha)\cdots(P_n(\alpha))^2$$
$$+ \cdots + (P_1(\alpha))^2\times(P_2(\alpha))^2\times\cdots P_n(\alpha)P_n'(\alpha)$$

$= P_1(\alpha)P_1'(\alpha) + P_2(\alpha)P_2'(\alpha) + \cdots + P_n(\alpha)P_n'(\alpha)$

$(\because (P_k(\alpha))^2 = 1 \quad (k = 1, 2, \cdots n))$

$h'(\alpha) = 2\{P_1(\alpha)P_1'(\alpha) + \cdots P_n(\alpha)P_n'(\alpha) = 0$

$\Rightarrow h(\alpha) = 0,\ h'(\alpha) = 0$

이 줄 아래 답안 작성 시 무효 처리됨