한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$의 양변을 x에 대해 미분하면 $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\frac{dy}{dx}=0$,
$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$이므로 $(-1,\frac{3}{2})$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3\times(-1)}{4\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성　　명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

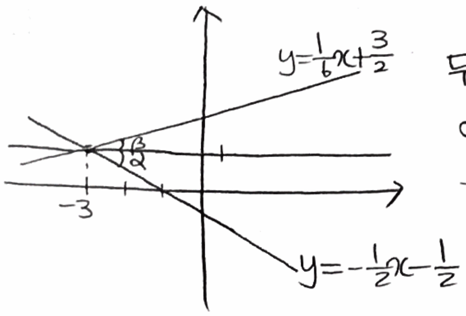
포물선 $x=y^2$ 위의 점 (t^2, t)에서의 접선을 구해보자.

$x=y^2$의 양변을 x에 대해 미분하면 $1=2y\frac{dy}{dx}$이고, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ 이다.

따라서 (t^2,t)에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2t}(x-t^2)+t=\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}t$이다.

이 접선이 점 $(-3,1)$을 지나므로 $1=\frac{-3}{2t}+\frac{t}{2}$, $t^2-2t-3=0$, $t=-1$ or 3이다.

따라서 두 접선의 기울기는 각각 $-\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{6}$이다.



두 접선이 $y=1$이라는 직선과 이루는 예각의 크기를 각각 α, β라 하자. $(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2})$

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$이고,

$\tan\beta=\frac{1}{6}$이므로 $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{37}}$, $\cos\beta=\frac{6}{\sqrt{37}}$이다.

$\alpha+\beta=\theta$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$\cos\theta=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{11}{\sqrt{185}}$

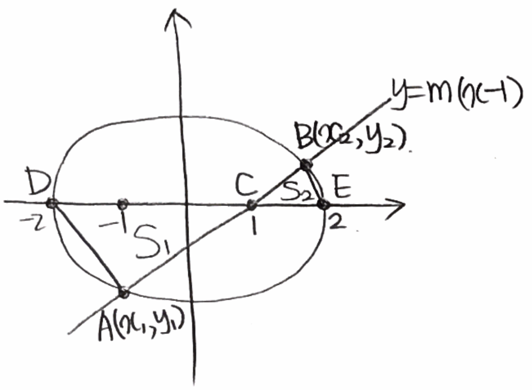
$=\frac{11\sqrt{185}}{185}$ 이다.

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]



점 A와 B는 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$과 직선 $y=m(x-1)$의 교점이다. $x=1+\frac{y}{m}$, $\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{m^2}+\frac{2y}{m}+1\right)+\frac{y^2}{3}=1$,

$\left(\frac{1}{4m^2}+\frac{1}{3}\right)y^2+\frac{1}{2m}y-\frac{3}{4}=0$, $(4m^2+3)y^2+6my-9m^2=0$

을 만족하는 y의 두 실근은 y_1, y_2이고, $x_1<x_2$이고 $m>0$이기 때문에 $y_1<y_2$이다.

$\therefore y_1=-3m-6m\sqrt{m^2+1}$, $y_2=-3m+6m\sqrt{m^2+1}$

$S_1=\frac{1}{2}\times 3\times|y_1|=-\frac{3}{2}y_1$ ($\because x_1<1$이고 $m>0$이므로 $y_1<0$)

$S_2=\frac{1}{2}\times 1\times|y_2|=\frac{1}{2}y_2$ ($\because x_2>1$이고 $m>0$이므로 $y_2>0$)

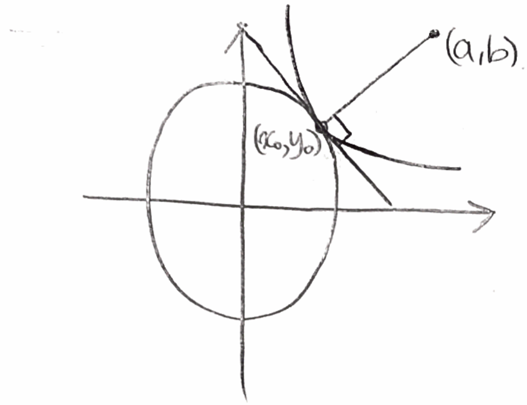
이므로 $\lim_{m\to 0}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{m\to 0}\frac{3(3m+6m\sqrt{m^2+1})}{-3m+6m\sqrt{m^2+1}}=\lim_{m\to 0}\frac{9+18\sqrt{m^2+1}}{-3+6\sqrt{m^2+1}}$

$=\frac{27}{3}=9$이다.

[문제 2-1]

타원 C 위의 점 중 점 A(a,b)까지 거리가 최소가 되는 점 (x_0, y_0)를 잡으면, 두 점을 연결한 직선과 점 (x_0, y_0)에서의 타원의 접선이 수직이 되어야 한다.

증명) 점 A에서 같은 거리에 있는 점들을 연결하면 동심원들이 생긴다. 이 동심원들 중



타원과 교점을 가지는 원 중 반지름의 길이가 최소인 원이 타원과 만나는 한 점을 (x_0, y_0)로 설정하면 A(a,b)과 (x_0, y_0) 사이의 거리가 최소가 된다. (x_0, y_0)에서 타원과 원은 공통접선을 가지고, 원의 성질에서 접선과 접점과 원의 중심을 연결한 직선은 수직이므로 (x_0, y_0)에서 타원의 접선과 점 A(a,b)와 (x_0, y_0)를 연결한 직선은 수직이 되어야 한다.

$2x^2+y^2=1$을 x에 대해 미분하면 $4x+2y\frac{dx}{dy}=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$이고,

$-\frac{2x_0}{y_0}\times\frac{y_0-b}{x_0-a}=-1$, $2x_0y_0-2bx_0=x_0y_0-ay_0$, $x_0y_0-2bx_0+ay_0=0$이다.

$a>1, b>1$이므로 (x_0, y_0)는 제 1사분면 위 점이고, $y_0=\sqrt{1-2x_0^2}$으로 표현할 수 있다. 이를 대입하면 $x_0\sqrt{1-2x_0^2}-2bx_0+a\sqrt{1-2x_0^2}=0$, $(x_0+a)\sqrt{1-2x_0^2}=2bx_0$

$(x_0^2+2ax_0+a^2)(1-2x_0^2)=4b^2x_0^2$, $2x_0^4+4ax_0^3+(2a^2+4b^2-1)x_0^2-2ax_0-a^2=0$

$\therefore$ (가) $2a^2+4b^2-1$ 이다.

[문제 2-2]

$f(x)=2x^4+4ax^3+(2a^2+4b^2-1)x^2-2ax-a^2$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$,

$f'(x)=8x^3+12ax^2+2(2a^2+4b^2-1)x-2a=0$, $4x^3+6ax^2+(2a^2+4b^2-1)x-a=0$

$g(x)=4x^3+6ax^2+(2a^2+4b^2-1)x=a$의 실근의 개수를 구해보자.

$g'(x)=12x^2+12ax+2a^2+4b^2-1=0$, $D/4=12a^2-48b^2+12<-21b^2+12<0$ ($\because b>1$)이므로

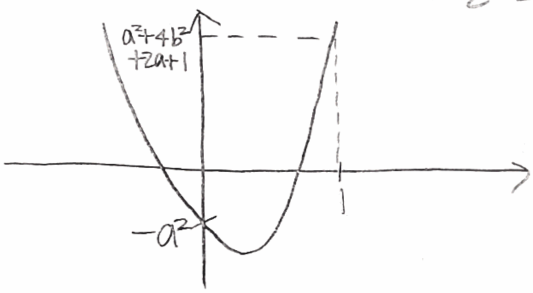
$g(x)$는 증가함수이고 $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$이므로 $g(x)=a$는 1개의 실근을 갖는다.

$\therefore f'(x)=0$은 1개의 실근을 갖고, 실근의 값을 α라고 하면 $x<\alpha$에서 $f'(x)<0$,
$x>\alpha$에서 $f'(x)>0$이므로 $x=\alpha$에서 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.

$f'(0)=-2a<0$, $f'(1)=4a^2+8b^2+10a+6>0$ ($\because a>1, b>1$)이므로 사잇값 정리에 의해 $0<\alpha<1$이다.

$f(0)=-a^2<0$, $f(1)=a^2+4b^2+2a+1>0$이다.

이를 종합해 $f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3]

$f(\frac{1}{2})=0$이므로 $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{1}{4}-a-a^2=-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+b^2-\frac{1}{8}=0$,

$b^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{2})^2$인데, $a>1$, $b>1$이므로 $b=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+\frac{1}{2})$(단, $a>1$, $b>\frac{3\sqrt{2}}{4}$)

라고 할 수 있다.