한양대학교 답안지 (자연계열)

수험번호	성명	페이지
		1/6

[문제 1-1]

타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 을 음함수의 미분하면 $\frac{2x}{4}+\frac{2y}{3}\frac{dy}{dx}=0$ 이다.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{4}\times\frac{3}{2y} = -\frac{3x}{4y}$$

이때 타원위의 점 $(-1, \frac{3}{2})$에서의 접선의 기울기를 구하는 것이므로

$x=-1, y=\frac{3}{2}$을 대입하면 $-\frac{3\times(-1)}{4\times\frac{3}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

~~∴ 접 $(-1, \frac{3}{2})$에~~ 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$위의 점 $(-1, \frac{3}{2})$에서 타원에 접하는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

한양대학교

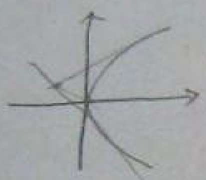
답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성　　명	페 이 지
		2/6

[문제 1-2]

점(-3,1)에서 포물선 $y^2=x$ 에 접하는 직선을 그었을때

그 ~~포물선의~~ 접점을 (t^2, t)라 하자



이때 접선의 기울기를 구하기위해 포물선 $x=y^2$의 도함수를 구하면

$1=2y\frac{dy}{dx}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$ 이다.

$y^2=x$

$y^2=4\cdot\frac{1}{4}x$

따라서 접선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$이다.

이때 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2t}(x-t^2)+t$

(-3,1)을 지나므로 $1=\frac{1}{2t}(-3-t^2)+t$ 가 성립한다.

$1=-\frac{3}{2t}-\frac{t}{2}+t$

$2t=-3-t^2+2t^2$. $\quad t^2-2t-3=0$. $\quad (t+1)(t-3)=0$

-3. $\quad \therefore t=-1$ 또는 3

두개의 접점은 $(1,-1)$, $(9,3)$이다.

이때 각각의 접선을 l_1, l_2라 하고 구해보면

$l_1: y=\frac{-1-1}{1+3}(x-1)-1=\frac{-2}{4}(x-1)-1=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

이때 l_1이 x축과 이루는 각을 α라 하면 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

$l_2: y=\frac{3-1}{9+3}(x+3)+1=\frac{2}{12}(x+3)+1=\frac{1}{6}(x+3)+1=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$

이때 l_2가 x축과 이루는 각을 β라 하면 $\tan\beta=\frac{1}{6}$

l_1, l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면. 이때 $\tan\theta=|\tan(\beta-\alpha)|=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|$

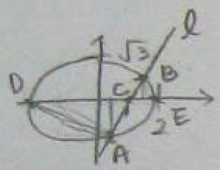
$=\left|\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{12}}\right|=\frac{8}{11}$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta>0$. $\sin\theta>0$. $\tan\theta>0$. $\quad \tan^2\theta+1=\sec^2\theta$ $\quad \frac{64}{121}+\frac{121}{121}=\sec^2\theta$ $\quad \sec^2\theta=\frac{185}{121}$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{121}{185}$ $\quad \cos\theta=\frac{11}{\sqrt{185}}=\frac{11\sqrt{185}}{185}$

[문제 1-3] 점 C(1,0)을 지나고 기울기가 양수 m인 직선을 l이라 하면

l: $y = mx - m$



$$\frac{x^2}{4} + \frac{(mx-m)^2}{3} = 1$$

$$3x^2 + 4m^2(x-1)^2 = 12$$

$$(3+4m^2)x^2 - 8m^2x + 4m^2 - 12 = 0$$

$+16$
-36

따라서 근의 공식에 따라 $x = \dfrac{4m^2 \pm \sqrt{16m^4 - (4m^2-12)(3+4m^2)}}{(3+4m^2)} = \dfrac{4m^2 \pm \sqrt{+20m^2+36}}{3+4m^2}$

두 근 x_1, x_2는 $x_1 < x_2$를 만족하므로 $x_1 = \dfrac{4m^2 - 2\sqrt{5m^2+9}}{3+4m^2}$ $\quad x_2 = \dfrac{4m^2 + 2\sqrt{5m^2+9}}{3+4m^2}$

$y_1 = mx_1 - m$, $\quad y_2 = mx_2 - m$

$S_1 = \triangle ACD = \frac{1}{2}|y_1| \times 3 = \frac{3}{2}(-y_1)$ $\qquad S_2 = \triangle BCE = \frac{1}{2}|y_2| \times 1 = \frac{1}{2}y_2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{3}{2}(-y_1)}{\frac{1}{2}y_2} = \frac{3(-y_1)}{y_2} = \frac{-3(mx_1 - m)}{mx_2 - m} = \frac{-3(x_1-1)}{x_2-1}$$

m>0 이므로

$$\therefore \lim_{m\to 0} \frac{S_1}{S_2} = \lim_{m\to 0} \frac{-3\left(\frac{4m^2 - 2\sqrt{5m^2+9}}{3+4m^2} - 1\right)}{\frac{4m^2 + 2\sqrt{5m^2+9}}{3+4m^2} - 1} = \lim_{m\to 0} \frac{-3(\cancel{4m^2} - 2\sqrt{5m^2+9} - 3 - \cancel{4m^2})}{\cancel{4m^2} + 2\sqrt{5m^2+9} - 3 - \cancel{4m^2}}$$

$$= \lim_{m\to 0} \frac{-3(-2\sqrt{5m^2+9} - 3)}{2\sqrt{5m^2+9} - 3} = \lim_{m\to 0} \frac{6\sqrt{5m^2+9} + 9}{2\sqrt{5m^2+9} - 3} = \frac{6\sqrt{9}+9}{2\sqrt{9}-3} = \frac{6\times 3 + 9}{2\times 3 - 3}$$

$$= \frac{18+9}{6-3} = \frac{27}{3}$$

$$= 9$$

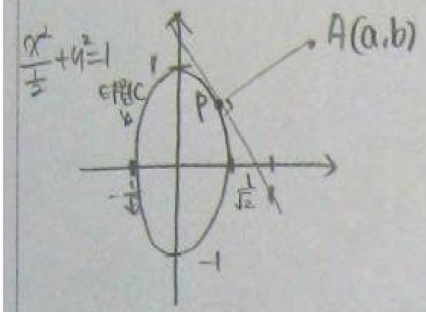
한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]

타원 C위의 점 중 A까지의 거리가 최소가 되는 점의 좌표를 (x_0, y_0)라 하고 그 점을 P라 해보자



$\overline{AP}$가 최소가 되기 위해서는 P에서의 접선과 $\overline{AP}$가 수직이어야 한다.

따라서 $P(x_0, y_0)$에서의 접선의 기울기를 구해보면

$$2\times 2x + 2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$ ∴ P에서의 접선의 기울기 : $-\frac{2x_0}{y_0}$

$\overline{AP}$의 기울기는 $\frac{b-y_0}{a-x_0}$

P에서의 접선과 $\overline{AP}$가 수직이므로 $-\frac{2x_0}{y_0}\times\frac{b-y_0}{a-x_0}=-1$ $\qquad \frac{2x_0(b-y_0)}{y_0(a-x_0)}=1$

$a>1,\ b>1$ 이므로
$\overline{AP}$가 최소가 될때
$1>x_0>0,\ 1>y_0>0$. $\overline{AP}$의 기울기는 양수
∴ $y_0(a-x_0)>0$

$$2bx_0-2x_0y_0=ay_0-x_0y_0$$

$$2bx_0=ay_0+x_0y_0 \qquad y_0=\frac{2bx_0}{x_0+a}$$

$P(x_0, y_0)$은 $2x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 $2x_0^2+y_0^2=1$ $\qquad 2x_0^2+\left(\frac{2bx_0}{x_0+a}\right)^2=1$.

$$2x_0^2(x_0^2+2ax_0+a^2)+4b^2x_0^2=(x_0^2+2ax_0+a^2)$$

$$2x_0^4+4ax_0^3+(2a^2+4b^2)x_0^2=x_0^2+2ax_0+a^2$$

$$2x_0^4+4ax_0^3+(2a^2+4b^2-1)x_0^2-2ax_0-a^2=0$$

$f(x_0)=2x_0^4+4ax_0^3+$ (가) $x_0^2-2ax_0-a^2=0$ 이므로

∴ (가) $=(2a^2+4b^2-1)$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

[문제2-1]에서 구한 $f(x)=2x^4+4ax^3+(2a^2+4b^2-1)x^2-2ax-a^2$

$f'(x)=8x^3+12ax^2+2(2a^2+4b^2-1)x-2a$

$f''(x)=24x^2+24ax+2(2a^2+4b^2-1)$

$=24(x^2+ax)+2(2a^2+4b^2-1)$

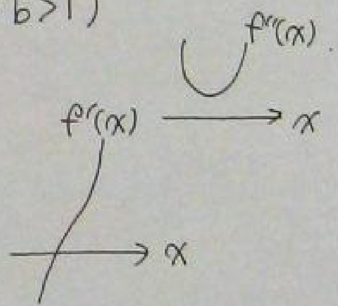
$=24(x+\frac{a}{2})^2+2(2a^2+4b^2-1)-\cancel{24}^{6}\times\frac{a^2}{\cancel{4}}$

$=24(x+\frac{a}{2})^2+4a^2+8b^2-2-6a^2$

$=24(x+\frac{a}{2})^2+8b^2-2a^2-2=24(x+\frac{a}{2})^2+2(4b^2-a^2-1)$

$a<\frac{3}{2}b$ 이므로 $a^2<\frac{9}{4}b^2$. $-a^2>-\frac{9}{4}b^2$

$4b^2-a^2>4b^2-\frac{9}{4}b^2=\frac{7}{4}b^2>\frac{7}{4}$ $(\because b>1)$



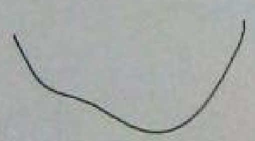
즉 $4b^2-a^2-1>0$ 이므로 $f''(x)>0$.

$f''(x)>0$ 이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.

따라서 $f'(x)=0$이 되는 x가 1개이므로

$f(x)$의 극값은 1개이다. 또한 $f''(x)=0$이되는 x가 없으므로 변곡점은 없다.

따라서 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		6/6

[문제 2-3] (x_0, y_0)을 점 P라 하자

[문제 2-1]에서와 같이 A와 $P(x_0, y_0)$간의 거리가 최소이려면 $\overline{AP} \perp$ 점 P에서의 접선 이어야 한다. 이때 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2x_0}{y_0}$이고 $\overline{AP}$의 기울기는 $\frac{b-y_0}{a-x_0}$ 임을 [문제2-1]에서 구했다 또, 문제의 조건에 의해 $x_0 = \frac{1}{2}$이고, $P(\frac{1}{2}, y_0)$는 $2x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$2 \times \frac{1}{4} + y_0^2 = 1$ $\quad y_0^2 = \frac{1}{2}$ $\quad a>1, b>1$ 이고 $\overline{AP}$가 최소이므로 $x_0>0, y_0>0$

$\therefore y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{2x_0}{y_0} \times \frac{b-y_0}{a-x_0} = -1$ $\quad \frac{2x_0(b-y_0)}{y_0(a-x_0)} = 1$을 $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$일때 만족하므로 대입해보면

$\frac{2 \times \frac{1}{2}(b-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\frac{1}{\sqrt{2}}(a-\frac{1}{2})} = 1$ $\quad \sqrt{2}(b-\frac{1}{\sqrt{2}}) = a-\frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{2}b-1 = a-\frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{2}b = a+\frac{1}{2}$

$\therefore b = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$