한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		1/6

[문제 1-1]

주어진 타원 식을 x에 대해 미분하면, 음함수 미분법에 의해

$\frac{2x}{4}+\frac{2y}{3}\cdot\frac{dy}{dx}=0$이다.

그러면, 타원 위의 점 (x,y)에서 접선의 기울기 $(\frac{dy}{dx})$는

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x}{4y}$이다.

∴ $x=-1$, $y=\frac{3}{2}$을 대입하면

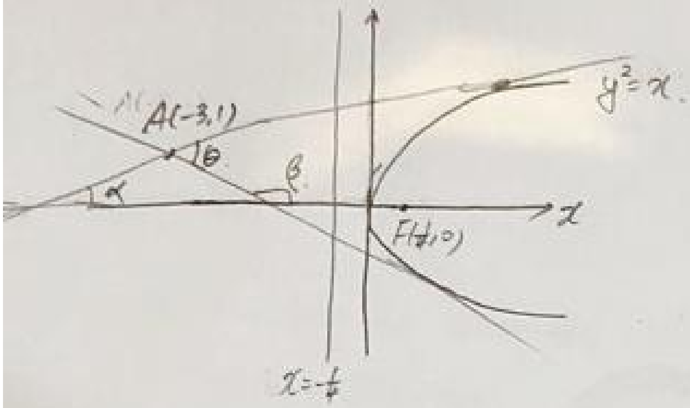
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3\cdot(-1)}{4\cdot\frac{3}{2}}=\frac{3}{2\cdot3}=\frac{1}{2}$$

∴ $\frac{1}{2}$

[문제 1-2]

$y^2 = x \Rightarrow y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}x$

∴ 주어진 포물선의 꼭지점은 $(0,0)$, 초점 $F(\frac{1}{4},0)$, 준선은 $x=-\frac{1}{4}$이다.



접선들이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α, β라 하자.

$$\Rightarrow \theta = \alpha + (\pi - \beta)$$

이제, 접선을 $y-1=m(x+3)$이라 하고, 접점을 (t^2,t)라 하자. (t는 2개, m은 2개)

음함수 미분법에 의해 (t^2,t)에서 포물선의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{1}{2t}$

∴ $m=\frac{1}{2t}$, $y-1=m(x+3)$은 (t^2,t)를 지나므로

$t-1=\frac{1}{2t}(t^2+3)$

$2t^2-2t=t^2+3$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\Rightarrow t=+3,\ t=-1$

∴ $m=\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{6}$, $\tan\beta=-\frac{1}{2}$ ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$)

$\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{37}}$ $\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{37}}$ $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta=\cos(\alpha+(\pi-\beta))$

$=\cos\alpha\cdot\cos(\pi-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(\pi-\beta)$

$=\cos\alpha\cdot(-\cos\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$=-\frac{6}{\sqrt{37}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\frac{1}{\sqrt{37}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=\frac{12}{\sqrt{185}}-\frac{1}{\sqrt{185}}$

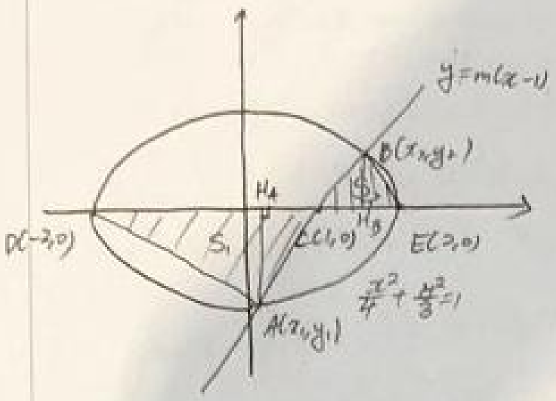
$=\frac{11}{\sqrt{185}}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		3/6

[문제 1-3]



A,B에서 x축에 내린 수선의 발을 H_A, H_B라 하자.

$\Rightarrow AH_A = |y_1|,\ BH_B = |y_2|$.

$\therefore S_1 = \frac{1}{2} CD \cdot AH_A = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot |y_1| = \frac{3}{2}|y_1|$

$S_2 = \frac{1}{2} CE \cdot BH_B = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot |y_2| = \frac{1}{2}|y_2|$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{3}{2}|y_1|}{\frac{1}{2}|y_2|} = \frac{3|y_1|}{|y_2|}$$

이제 $|y_1|, |y_2|$를 구하자.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{\{m(x-1)\}^2}{3}=1$$

$$3x^2+4m^2(x-1)^2=12$$

$$3x^2+4m^2(x^2-2x+1)=12$$

$$(3+4m^2)x^2-8m^2x+4m^2-12=0$$

$$x=\frac{4m^2\pm\sqrt{(4m^2)^2-(3+4m^2)(4m^2-12)}}{3+4m^2}$$

$$=\frac{4m^2\pm\sqrt{16m^4-(16m^4-36m^2-36)}}{3+4m^2}$$

$$=\frac{4m^2\pm\sqrt{36m^2+36}}{3+4m^2}$$

$\therefore x_1=\frac{4m^2-6\sqrt{m^2+1}}{3+4m^2}$, $x_2=\frac{4m^2+6\sqrt{m^2+1}}{3+4m^2}$

그런데, $y_2 = m\cdot(x_2-1)$

$$= m\cdot\frac{6\sqrt{m^2+1}-3}{3+4m^2}$$

$y_1 = m(x_1-1)$

$$= m\cdot\frac{-6\sqrt{m^2+1}-3}{3+4m^2}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=3\cdot\frac{|y_1|}{|y_2|}=3\cdot\frac{\left|m\cdot\frac{-6\sqrt{m^2+1}-3}{3+4m^2}\right|}{\left|m\cdot\frac{+6\sqrt{m^2+1}-3}{3+4m^2}\right|}$$

$$=3\,\frac{|-6\sqrt{m^2+1}-3|}{|+6\sqrt{m^2+1}-3|}$$

$$=3\,\frac{6\sqrt{m^2+1}+3}{6\sqrt{m^2+1}-3}$$

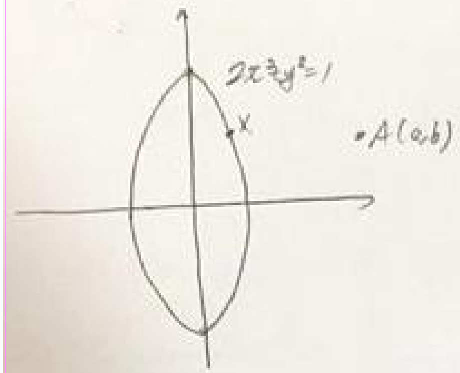
$$\therefore \lim_{m\to0}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{m\to0}3\,\frac{6\sqrt{m^2+1}+3}{6\sqrt{m^2+1}-3}$$

$$=3\cdot\frac{6+3}{6-3}=\boxed{9}$$

한양대학교 답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		4/6

[문제 2-1]



X를 타원 위 임의의 점이라 하자.
우리는 $X(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \sin\theta)$으로 매개화할 수 있다.

$\overrightarrow{AX} = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - a, \sin\theta - b)$

$|\overrightarrow{AX}|^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - a)^2 + (\sin\theta - b)^2$

$= \frac{1}{2}\cos^2\theta - \sqrt{2}a\cos\theta + a^2 + \sin^2\theta - 2b\sin\theta + b^2$

$\frac{d(|\overrightarrow{AX}|^2)}{d\theta} = \cos\theta\cdot(-\sin\theta) + \sqrt{2}a\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 2b\cos\theta$

이 식이 0이 되는 θ를 θ^*라 하자

$-\sin\theta^*\cos\theta^* + \sqrt{2}a\sin\theta^* + 2\sin\theta^*\cos\theta^* - 2b\cos\theta^* = 0$

$\downarrow \div 2$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta^*(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta^* - a) + \cos\theta^*(\sin\theta^* - b) = 0$

$\underbrace{(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta^*, \cos\theta^*)}_{\theta=\theta^*\text{에서의 접선의 방향벡터}}\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta^* - a, \sin\theta^* - b) = 0$

$\therefore$ 거리의 최소($|\overrightarrow{AX}|^2$의 최소)는 $\theta=\theta^*$, 즉 $\overrightarrow{AX}$와 X에서의 접선이 수직일 때의 $|\overrightarrow{AX}|$ 값이다.

최소가 되는 X를 X^*라 하면 $X^*(x_0, y_0)$. X^*에서의 접선의 기울기를 구하기 위해 음함수 미분을 하면

$4x + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} \Rightarrow -\frac{2x_0}{y_0}$

$\therefore X^*$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2x_0}{y_0}$이다.

$\Rightarrow -\frac{2x_0}{y_0} \times \frac{b-y_0}{a-x_0} = -1$

$2x_0(b-y_0) = y_0(a-x_0)$.

$-2x_0y_0 + 2bx_0 = -x_0y_0 + ay_0$

$(x_0+a)y_0 = 2bx_0$

제곱

$(x_0+a)^2y_0^2 = (2bx_0)^2$

$2x_0^2+y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = 1-2x_0^2$

$(x_0^2+2ax_0+a^2)(1-2x_0^2) = 4b^2x_0^2$

$-2x_0^4 - 4ax_0^3 + (1-2a^2)x_0^2 + 2ax_0 + a^2 = 4b^2x_0^2$

$2x_0^4 + 4ax_0^3 + (4b^2+2a^2-1)x_0^2 - 2ax_0 - a^2 = 0$

$\therefore$ (가) $4b^2+2a^2-1$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수 험 번 호	성 명	페 이 지
		5/6

[문제 2-2]

$f(x) = 2x^4 + 4ax^3 + (4b^2+2a^2-1)x^2 - 2ax - a^2$

$f'(x) = 8x^3 + 12ax^2 + 2(4b^2+2a^2-1)x - 2a$

$= 2(4x^3 + 6ax^2 + (4b^2+2a^2-1)x - a)$

$f''(x) = 24x^2 + 24ax + 2(4b^2+2a^2-1)$

$= 24(x^2+ax) + 2(4b^2+2a^2-1)$

$= 24(x+\frac{1}{2}a)^2 + 8b^2 - 2a^2 - 2$

$\geq 8b^2 - 2a^2 - 2$

$> 8b^2 - 2\cdot(\frac{3}{2}b)^2 - 2$

$= 8b^2 - \frac{9}{2}b^2 - 2$

$= \frac{7}{2}b^2 - 2 > 0 \quad (\because b > 1)$

$\therefore f''(x)$은 모든 실수 x에 대해 양수이다.

$\rightarrow f'(x)=0$은 오직 1개의 실근만을 가진다.

$\rightarrow f(x)=0$은 극점이 1개뿐이며, 그 극점은 $y=f(x)$의 최솟값이다 $(\because \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty)$

또, $y=f(x)$는 항상 아래로 볼록이다.

① $f'(\alpha)=0$이라 하자.

$f'(0) = -2a < 0$

$f'(1) = 8 + 12a + 8b^2 + 4a^2 - 2 - 2a$

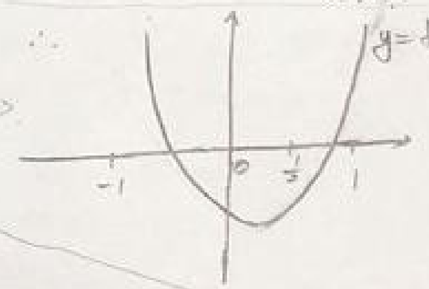
$= 4a^2 + 10a + 8b^2 + 6 > 0$

$f'(\frac{1}{2}) = 1 + 3a + 4b^2 + 2a^2 - 1 - 2a$

$= 2a^2 + a + 4b^2 > 0$

$f'(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 중간값 정리에 의해 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x)$은 $0 < x < \frac{1}{2}$에서 최솟값을 가진다.



② $f(0) = -a^2$

$f(1) = 2 + 4a + 4b^2 + 2a^2 - 1 - 2a - a^2$

$= a^2 + 2a + 4b^2 + 1 > 0$

$f(-1) = 2 - 4a + 4b^2 + 2a^2 - 1 + 2a - a^2$

$= a^2 - 2a + 4b^2 + 1$

$= (a-1)^2 + 4b^2 > 0$

$\therefore f(x)=0$의 두 근은 $-1 < x < 0$, $\alpha < x < 1$에 있다.

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}a + b^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4} - a - a^2$

$= -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8} + b^2$

$= b^2 - \frac{1}{2}(a^2 + a + \frac{1}{4}) = b^2 - \frac{1}{2}(a+\frac{1}{2})^2 > b^2 - \frac{1}{2}(\frac{3}{2}b + \frac{1}{2})^2$

$f(\frac{1}{2})$의 부호 판정

부호

$= -\frac{1}{8}b^2 - \frac{3}{4}b - \frac{1}{8}$

한양대학교

답안지 (자연계열)

수험번호	성명	페이지
		6/6

[문제 2-3]

$$2x_0^4+4ax_0^3+(4b^2+2a^2-1)x_0^2-2ax_0-a^2=0$$

$x_0=\frac{1}{2}$: $\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a+(4b^2+2a^2-1)\frac{1}{4}-a-a^2=0$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}a-a-a^2+\left(b^2+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{1}{4}=0$$

$$b^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$$

$\therefore$ $b=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$ ($\because a>1, b>1$) //